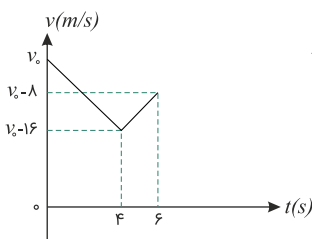


گزینه ۴

۱

سطح زیر نمودار شتاب- زمان برابر با تغییرات سرعت است. در ۴ ثانیه اول، سرعت ۱۶ m/s کاهش می‌یابد و سپس در ۲ ثانیه بعد ۸ m/s به سرعت اضافه می‌شود؛ بنابراین نمودار سرعت- زمان به شکل زیر می‌شود. باتوجه به اینکه سطح زیر نمودار $v - t$ برابر با جابه‌جایی است، می‌توان نوشت:



$$\Delta x = \frac{v_0 + (v_0 - 16)}{2} \times 4 + \frac{(v_0 - 16) + (v_0 - 8)}{2} \times 2$$

$$\Rightarrow \Delta x = 6v_0 - 56$$

طبق سؤال، سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت برابر با ۴ m/s است، بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 4 = \frac{6v_0 - 56}{6} \Rightarrow v_0 = \frac{40}{3} \text{ m/s}$$

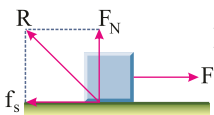
دقت کنید در حقیقت باید نمودار را طوری رسم می‌کردیم که در لحظه $t = 4s$ ، سرعت منفی باشد. ولی هدف از رسم این شکل تقریبی این است که بیان کنیم اگرچه شکل تقریبی است ولی چون از روش حل درستی استفاده می‌کنیم، بنابراین جواب نهایی درست به دست خواهد آمد.

گزینه ۱

۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینه "۱": نیروی سطح وارد بر جسم برابر با برآیند نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک است. در این سؤال نیروی عمودی سطح با نیروی وزن جسم برابر است.



$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \xrightarrow{F_N=W} R = \sqrt{W^2 + f_s^2} > W$$

گزینه "۲": مطابق رابطه فوق، چون $f_s = F$ ، با کاهش نیروی F نیروی سطح نیز کاهش می‌یابد.

گزینه "۳": با کاهش نیروی F ، نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم کاهش می‌یابد و جسم همچنان ساکن است.

گزینه "۴": چون جسم ساکن است، بنابراین الزاماً نیروی اصطکاک در خلاف جهت نیروی \vec{F} به جسم وارد می‌شود.

گزینه ۳

۳

نمودار از سه قسمت با شتاب‌های ثابت متفاوت تشکیل شده است.

$$v_{t=5s} = v_0 + a_1 t = 0 + 2 \times 5 = 10 \text{ m/s}$$

در بازه زمانی $t = 5s$ تا $t = 15s$ شتاب صفر است؛ پس سرعت متحرک در این بازه ثابت و برابر با ۱۰ m/s است. برای بازه $t = 15s$ تا $t = 25s$ داریم:

$$v_{t=25s} = a_2 t + v_{t=15s} = -2 \times 10 + 10 = -10 \text{ m/s}$$

وزن ماهواره هنگام حرکت دایره‌ای یکنواخت در فضا برابر با نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره است؛ بنابراین داریم:

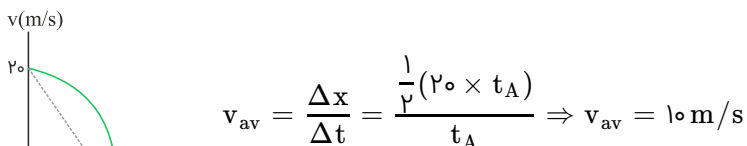
$$F_r = ma_r = 2000 \times 4 = 8000 \text{ N}$$

طبق قانون دوم نیوتون ($\vec{F}_{\text{net}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$)، شیب خط مماس بر نمودار $p - t$ در هر لحظه برابر با اندازه نیروی وارد بر جسم در آن لحظه است. در نتیجه داریم:

$$F = \frac{12 - 0}{4 - 2} \Rightarrow F = 6 \text{ N}$$

گزینه "۱": نادرست، طبق رابطه $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ اگر برآیند نیروها صفر باشد $\Delta P = 0$ می‌شود، در نتیجه $P_1 = P_2$ است. یعنی تکانه ثابت می‌ماند و ممکن است، صفر نباشد.
گزینه "۲": نادرست، چون در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار سرعت به علت تغییر جهت آن تغییر می‌کند، بنابراین حرکت، شتاب‌دار است، لذا بر جسم نیرو وارد می‌شود.
گزینه "۳": نادرست، اگرچه در حرکت دایره‌ای یکنواخت اندازه سرعت ثابت است، اما چون بردار سرعت تغییر می‌کند، الزاماً بر آن نیرو وارد می‌شود.
گزینه "۴": درست، در حرکت شتاب‌دار تند شونده بر روی خط راست، بردارهای سرعت و شتاب هم‌جهت‌اند، بنابراین چون همواره نیرو و شتاب هم‌جهت‌اند باید سرعت با نیرو نیز هم‌جهت باشند.

اگر سرعت متحرک با شتاب ثابت به صفر می‌رسید، نمودار سرعت- زمان آن به صورت خط راست (مطابق با نقطه‌چین) می‌بود و در آن صورت سرعت متوسط برابر بود با:



چون سطح زیر نمودار $v - t$ و محور زمان در این سؤال از سطح مشخص شده بزرگ‌تر است، بنابراین جابه‌جایی متحرک t (s) نسبت به حالت فرضی قبلی بیشتر است و در نتیجه بزرگی سرعت متوسط متحرک از 10 m/s بیشتر و از 20 m/s کمتر خواهد بود.

در صورتی که آسانسور به صورت تندشونده به سمت بالا یا کندشونده به سمت پایین حرکت کند عدد ترازو بیشتر از وزن عدد آن هنگام سکون آسانسور است. به عبارتی هنگامی که بردار شتاب به سمت بالا باشد، عددی که ترازو نشان می‌دهد بیشتر از حالت سکون است.

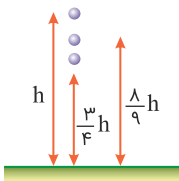
سه ثانیه دوم حرکت، بازه زمانی $t_1 = 3\text{ s}$ تا $t_2 = 6\text{ s}$ است؛ بنابراین برای محاسبه جابه‌جایی متحرک در این بازه زمانی، می‌توان نوشت:

$$t_1 = 3\text{ s} \Rightarrow x_1 = 3^3 - 5 \times 3^2 + 6 = -12\text{ m}$$

$$t_2 = 6\text{ s} \Rightarrow x_2 = 6^3 - 5 \times 6^2 + 6 = 42\text{ m}$$

طبق تعریف سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{42 - (-12)}{6 - 3} = 18\text{ m/s}$$



با در نظر گرفتن محل رها شدن جسم به‌عنوان مبدأ مکان، داریم:

$$v_2^2 = -2g\Delta y \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{(1 - \frac{1}{9})h}{(1 - \frac{1}{81})h}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{9}}{\frac{80}{81}}} = \frac{2}{3}$$

سرعت خطی ماهواره‌ای که در فاصله r از مرکز زمین قرار دارد از رابطه $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ به دست می‌آید.

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}}$$

$$\xrightarrow{v_A = 3v_B} 3 = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = 9$$

اندازه شتاب مرکزگرای ماهواره باتوجه به رابطه $g = G\frac{M_e}{r^2}$ ، با مجذور فاصله آن تا مرکز زمین رابطه عکس دارد.

$$g = G\frac{M_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 = (9)^2 = 81$$

ازطرفی مجذور دوره حرکت ماهواره به دور زمین با مکعب فاصله آن تا مرکز زمین متناسب است (قانون سوم کپلر)؛ بنابراین داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} \Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \frac{1}{729}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{1}{729}} = \frac{1}{27}$$

راه حل اول:

دو ثانیه سوم یعنی بازه زمانی ۴ s تا ۶ s داریم:

$$t_1 = 4 \text{ s} \Rightarrow v_1 = -3(4) + 4 = -8 \text{ m/s}$$

$$t_2 = 6 \text{ s} \Rightarrow v_2 = -3(6) + 4 = -14 \text{ m/s}$$

بنابراین:

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta x = \frac{-8 + (-14)}{2} \times (6 - 4) \Rightarrow |\Delta x| = 22 \text{ m}$$

راه حل دوم:

با استفاده از رابطه جابه‌جایی در T ثانیه nم در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم داریم:

$$\Delta x = (n - 0.5)aT^2 + v_0 T \Rightarrow \Delta x = (3 - 0.5)a(2)^2 + v_0(2)$$

$$\Rightarrow \Delta x = 2/5(-3)(2)^2 + 4(2) \Rightarrow |\Delta x| = |-3 \cdot 0 + 8| = 22 \text{ m}$$

زمانی که آسانسور از حال سکون با شتاب ثابت به سمت بالا حرکت می‌کند، داریم:

$$F_{N1} - m_1 g = m_1 a_1 \Rightarrow F_{N1} = m_1 (g + a_1)$$

اما زمانی که آسانسور از حال سکون با شتاب ثابت به سمت پایین حرکت می‌کند، داریم:

$$m_2 g - F_{N2} = m_2 a_2 \Rightarrow F_{N2} = m_2 (g - a_2)$$

از آنجاکه وزن ظاهری کودک و شخص یکسان است، داریم:

$$F_{N1} = F_{N2} \Rightarrow m_1 (g + a_1) = m_2 (g - a_2)$$

$$\frac{m_1 = 60 \text{ kg}}{a_1 = a_2 = 2 \text{ m/s}^2} \rightarrow 60(10 + 2) = m(10 - 2) \Rightarrow m = 60 \text{ kg}$$

در مسیر A تا B، حرکت یکنواخت است؛ بنابراین:

$$F - f_k = 0 \Rightarrow F = f_k = \mu_k (mg) \Rightarrow F = 0.2 \times 2 \times 10 \Rightarrow F = 4 \text{ N}$$

در مسیر B تا دیوار، حرکت با شتاب ثابت است؛ بنابراین:

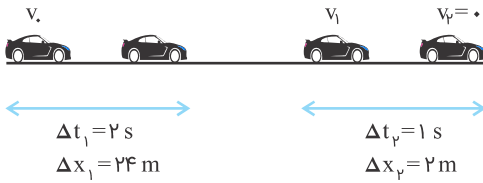
$$F - f_k = ma \Rightarrow F - (\mu'_k mg) = ma$$

$$\Rightarrow 4 - (0.4 \times 2 \times 10) = 2a \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

اکنون برای مسیر B تا دیوار، با استفاده از معادله سرعت-جابه‌جایی (مستقل از زمان)، مسافت طی‌شده تا لحظه توقف را حساب می‌کنیم.

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow (0)^2 = (4)^2 + 2(-2)\Delta x \Rightarrow \Delta x = 4 \text{ m}$$

چون فاصله نقطه B تا دیوار ۱۰ m است، پس متحرک در فاصله ۱ متری دیوار می‌ایستد.



در ثانیه آخر قبل از توقف، داریم:

$$\Delta x_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t_2 \Rightarrow 2 = \frac{v_1 + 0}{2} \times 1 \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

شتاب حرکت متحرک، برابر است با:

$$v_2 = a \Delta t_2 + v_1 \Rightarrow 0 = a \times 1 + 4 \Rightarrow a = -4 \text{ m/s}^2$$

برای ۲ ثانیه اول بعد از ترمز کردن، داریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 + v_0 \Delta t_1 \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times (-4) \times 2^2 + v_0 \times 2 \Rightarrow v_0 = 16 \text{ m/s}$$

برای تعیین نوع حرکت باید به علامت شتاب و سرعت توجه کرد. برای این منظور ابتدا معادله سرعت-زمان و شتاب-زمان را به دست می‌آوریم و سپس لحظه‌ای که سرعت برابر با صفر می‌شود را محاسبه کرده و با تعیین علامت معادله‌های سرعت-زمان و شتاب-زمان، نوع حرکت را تعیین می‌کنیم.

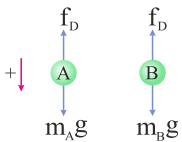
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} a t^2 - 10t + 18 \\ x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \text{ m/s}^2 & (1) \\ v_0 = -10 \text{ m/s} & (2) \end{cases}$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow{(1), (2)} v = 10t - 10$$

$$\xrightarrow{v=0} 10t - 10 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

t(s)	0	1	
v	-	0	+
a	+		+
نوع حرکت	کند شونده	تند شونده	

باتوجه به جدول تعیین علامت، در بازه زمانی ۰ تا ۲ s نوع حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.



باتوجه به قانون دوم نیوتون، شتاب هریک از گلوله‌ها را به دست می‌آوریم:
با در نظر گرفتن جهت مثبت حرکت به سمت پایین داریم:

$$\left. \begin{aligned} m_A g - f_D &= m_A a_A \Rightarrow a_A = g - \frac{f_D}{m_A} \\ m_B g - f_D &= m_B a_B \Rightarrow a_B = g - \frac{f_D}{m_B} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{m_A > m_B} a_A > a_B$$

باتوجه به رابطه مستقل از زمان تندی برخورد دو گلوله با سطح زمین را مقایسه می‌کنیم:

$$v^r - v_0^r = \frac{v_0^r - v_0^r}{a_A > a_B} = \frac{v_A^r}{v_B^r} = \frac{a_A}{a_B} > 1$$

$$\Rightarrow v_A > v_B$$

اکنون با استفاده از رابطه مکان-زمان، زمان رسیدن دو گلوله به سطح زمین را مقایسه می‌کنیم.

$$\Delta y = \frac{1}{2} a t^r \xrightarrow{\Delta y_A = \Delta y_B} \frac{1}{2} a_A t_A^r = \frac{1}{2} a_B t_B^r$$

$$\xrightarrow{a_A > a_B} \left(\frac{t_B}{t_A}\right)^r = \frac{a_A}{a_B} > 1 \Rightarrow t_B > t_A$$

نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت ماهواره به دور زمین توسط نیروی گرانش تأمین می‌گردد؛ داریم:

$$\frac{m v^r}{r} = G \frac{m M_e}{r^r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_e}{r}} \quad (1)$$

ازطرفی روی سطح زمین داریم:

$$g = G \frac{M_e}{R_e^r} \Rightarrow G M_e = g R_e^r \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} v = R_e \sqrt{\frac{g}{r}} = R_e \sqrt{\frac{g}{R_e + h}} = 64 \times 10^5 \sqrt{\frac{10}{(6400 + 3600) \times 10^3}}$$

$$\Rightarrow v = 64 \times 10^5 \times \frac{1}{10^3} = 6400 \text{ m/s}$$

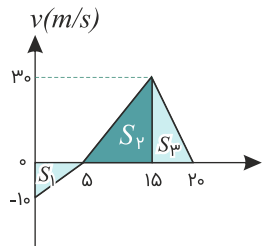
گزینه ۳

گام اول

سرعت متوسط جسم در مدت ۲۰ ثانیه نشان داده شده ؟ $\Delta t = 20s, v_{av} = ?$

گام دوم

برای محاسبه سرعت از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. باتوجه به این نکته که مساحت زیر نمودار برابر با مقدار جابه‌جایی است جابه‌جایی را به دست آورده و در رابطه بالا جاگذاری می‌کنیم (دقت شود که S_1 پایین محور t است، پس مقدارش منفی است).



$$\Delta x = -S_1 + S_2 + S_3$$

$$\begin{cases} S_1 = \frac{5 \times 10}{2} = 25 \\ S_2 = \frac{(15 - 5) \times 30}{2} = 150 \\ S_3 = \frac{(20 - 15) \times 30}{2} = 75 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = -25 + 150 + 75 = 200, m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m/s}$$

گزینه ۱

برای یافتن نیروی خالص، ابتدا a را از روی معادله حرکت می‌یابیم، سپس در رابطه $F_{net} = ma$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = 2t^2 - 4t + b \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

اندازه نیروی خالص برابر است با:

$$F_{net} = ma = 5 \times 4 = 20 \text{ N}$$

گزینه ۱

با نوشتن رابطه سرعت متوسط و تندی متوسط و تقسیم آن‌ها بر یکدیگر داریم:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{v_{av}}{s_{av}} \right| &= \left| \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} \right| = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \Delta x &= x_f - x_i = -10 - 10 = -20 \text{ m} \\ \Delta t &= 3 + 5 + 12 + 10 = 30 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left| \frac{v_{av}}{s_{av}} \right| = \left| \frac{-20}{30} \right| \Rightarrow \left| \frac{v_{av}}{s_{av}} \right| = \frac{2}{3}$$

اگر طول مسیر را d فرض کنیم، در حالت اول، متحرک مسافت $\frac{d}{۲}$ اول را با تندی ۲۰ m/s و مسافت $\frac{d}{۲}$ بعدی را با تندی ۳۰ m/s طی کرده است، پس با استفاده از تعریف تندی متوسط داریم:

$$S_1 = \frac{\ell_1}{\Delta t_1} = \frac{\frac{d}{۲} + \frac{d}{۲}}{\frac{d}{۲۰} + \frac{d}{۳۰}} = ۲۴ \text{ m/s}$$

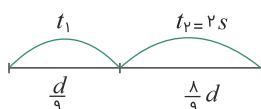
در حالت دوم اگر کل مدت زمان حرکت را t فرض کنیم، متحرک زمان $\frac{t}{۲}$ را با تندی ۲۰ m/s و زمان $\frac{t}{۲}$ را با تندی ۳۰ m/s طی کرده است، پس با استفاده از تعریف تندی متوسط می‌توان نوشت:

$$S_2 = \frac{\ell_2}{\Delta t_2} = \frac{۲۰ \times \frac{t}{۲} + ۳۰ \times \frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲} + \frac{t}{۲}} = ۲۵ \text{ m/s}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{۲۴}{۲۵} = ۰/۹۶$$

باید توجه داشت جابه‌جایی قسمت آخر را نباید با قسمت اول مقایسه کرد زیرا سرعت اولیه مرحله آخر با مرحله اول که $v_0 = 0$ است، برابر نیست ولی سرعت اولیه برای مرحله اول و کل مسیر با هم برابر است. داریم:



$$\Delta x_1 = \frac{1}{۲} a t_1^2 + v_0 t_1 \Rightarrow \frac{d}{9} = \frac{1}{۲} a t_1^2 \quad (1)$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = \frac{1}{۲} a (t_1 + t_2)^2 + v_0 (t_1 + t_2) \Rightarrow d = \frac{1}{۲} a (t_1 + t_2)^2 \quad (2)$$

$$\frac{(1) \div (2)}{\rightarrow} \frac{1}{9} = \frac{t_1^2}{(t_1 + t_2)^2} \Rightarrow \frac{1}{۳} = \frac{t_1}{t_1 + t_2} \Rightarrow t_1 + t_2 = ۳t_1 \Rightarrow t_2 = ۲t_1$$

$$\xrightarrow{t_2 = 2s} t_1 = 1s$$

بنابراین:

$$\Delta x_{\text{کل}} = \frac{1}{۲} (۴)(1 + ۲)^2 = ۱۸ \text{ m}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = K \\ K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{K} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

$$\frac{v_1 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}}{100} \Rightarrow \frac{11}{100} = \left(\frac{v_2}{20}\right)^2 \Rightarrow v_2 = \frac{9}{10} \times 20 = 18 \text{ m/s}$$

$$p_1 = mv_1 = 2 \times 20 = 40 \text{ kg.m/s}$$

$$p_2 = mv_2 = 2 \times 18 = 36 \text{ kg.m/s}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 36 - 40 = -4 \text{ kg.m/s}$$

ابتدا سرعت جسم را در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ حساب می‌کنیم و سپس از قضیه کار و انرژی جنبشی کار برآیند نیروها را به دست می‌آوریم:

$$v_1 = \frac{P_1}{m} \xrightarrow{P_1 = -20 \text{ kg m/s}, m = 2 \text{ kg}} v_1 = \frac{-20}{2} = -10 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{P_2}{m} \xrightarrow{P_2 = 20 \text{ kg m/s}, m = 2 \text{ kg}} v_2 = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/s}$$

$$W_T = K_2 - K_1 \Rightarrow W_T = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow W_T = \frac{1}{2} \times 2 \times 100 - \frac{1}{2} \times 2 \times 100 \Rightarrow W_T = 0$$