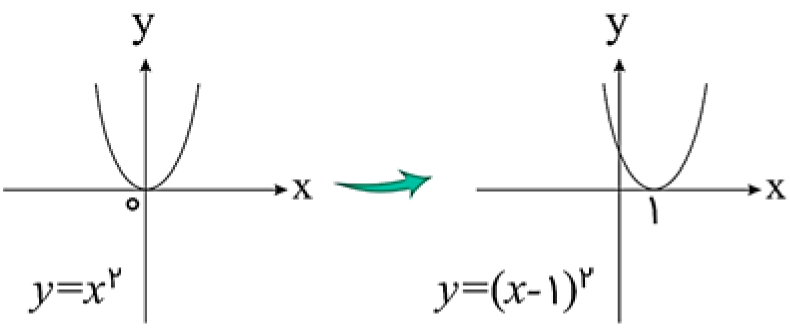
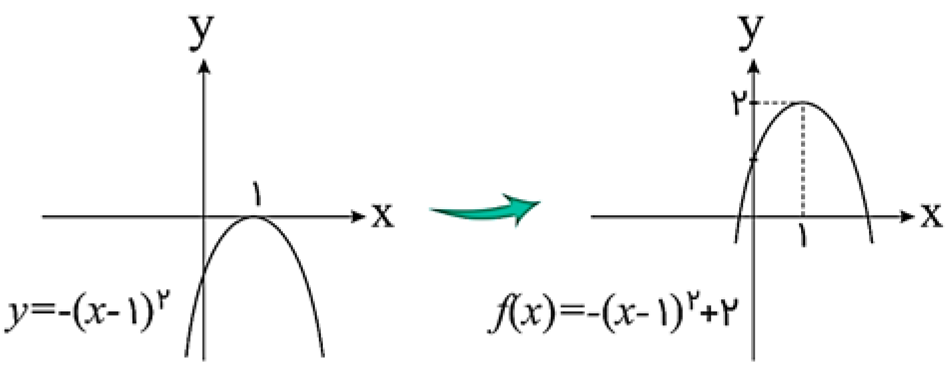
۱

گزینه ۳

با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = x^۲$، نمودار تابع $y = -(x-۱)^۲ + ۲$ را به دست می‌آوریم.





توجه کنید که نمودار گزینهٔ "۲" نادرست است؛ چون با $f(۰) = -۱ + ۲ = ۱$ مطابقت ندارد.

۲ گزینه ۳

ازآنجاکه تابع است پس وقتی مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب با هم برابر باشد، مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز با هم برابر است.

$$(۵,۲m)=(۵,۴m-۱)\Rightarrow ۲m=۴m-۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

$$\{(۵,۱),(۵,n^۲-\frac{۳n}{۲}),(۲n+۱,n^۲)\}$$

$$\Rightarrow (۵,۱)=(۵,n^۲-\frac{۳n}{۲})\Rightarrow n^۲-\frac{۳n}{۲}=۱\Rightarrow n^۲-\frac{۳n}{۲}-۱=۰$$

$$\Rightarrow (n-۲)(n+\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow \begin{cases} n=-\frac{۱}{۲} \\ n=۲ \end{cases}$$

$$n=۲\Rightarrow \{(۵,۱),(۵,۴)\}\Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$n=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \{(۵,۱),(۰,\frac{۱}{۴})\}\Rightarrow \text{۲ زوج مرتب دارد}$$

۳ گزینه ۲

$$\xrightarrow{(۲,-۳)\in f} -۳=۲a+b \qquad (۱)$$

$$f(۳)=f(۰)-۶$$
$$\Rightarrow ۳a+b=b-۶\Rightarrow ۳a=-۶\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین:

$$۲a+b=-۳\xrightarrow{a=-۲}-۴+b=-۳\Rightarrow b=۱$$

درنتیجه:

$$f(x)=۱-۲x\Rightarrow f(۱)=۱-۲=-۱$$

۴ گزینه ۴

رد گزینهٔ "۱":

$$A=(-\infty,۰]\,,\,B=[۰,+\infty)\Rightarrow A\cap B=\{۰\}\quad \text{متناهی}$$

رد گزینهٔ "۲":

$$A=\mathbb{W},B=\mathbb{N}\Rightarrow A-B=\{۰\}\quad \text{متناهی}$$

از طرفی اگر $A\subseteq B$ باشد و A نامتناهی باشد، ازآنجاکه تمام اعضای مجموعهٔ A در B نیز است، بنابراین B نیز متناهی است؛ اما اگر B نامتناهی باشد، نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت A متناهی یا نامتناهی است.

۵ گزینه ۱

$$t_{۳n+۱}=۳n^۲-n$$

$$\begin{cases}۳n+۱=۷\Rightarrow n=۲\Rightarrow t_۷=۳\times ۲^۲-۲=۱۰\\ ۳n+۱=۱۳\Rightarrow n=۴\Rightarrow t_{۱۳}=۳\times ۴^۲-۴=۴۸-۴=۴۴\\ ۳n+۱=۱۶\Rightarrow n=۵\Rightarrow t_{۱۶}=۳\times ۵^۲-۵=۷۵-۵=۷۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow t_۷+t_{۱۳}-t_{۱۶}=۱۰+۴۴-۷۰=-۱۶$$

۶ گزینه ۳

در شکل nاُم تعداد دایره‌های سیاه را b_n و تعداد دایره‌های سفید را a_n می‌گیریم. طبق شکل‌ها داریم:

$$b_۱=۱ \qquad b_۲=۱+۳=۴ \qquad b_۳=۱+۳+۵=۹$$
$$a_۱=۲=۱\times۲ \qquad a_۲=۲+۴=۶=۲\times۳ \qquad a_۳=۲+۴+۶=۱۲=۳\times۴\ ,\ \dots$$

بنابراین الگو چنین است:

$$b_n=n^۲\ ,\ a_n=n(n+۱)$$

لذا:

$$\frac{a_{۱۰}}{b_{۱۰}}=\frac{۱۰\times۱۱}{۱۰^۲}=\frac{۱۱}{۱۰}=۱/۱$$

۷ گزینه ۲

دنباله را به شماره‌های زوج و فرد افراز می‌کنیم:

اگر n عددی فرد باشد $\Rightarrow ۱,۶,۱۵,۲۸,\dots\Rightarrow a_n=\dfrac{n(n+۱)}{۲}$

اگر n عددی زوج باشد $\Rightarrow ۱,۶,۱۵,۲۸,\dots\Rightarrow a_n=\dfrac{n(n-۱)}{۲}$

$$\Rightarrow a_{۴۰}=\frac{۴۰(۴۰-۱)}{۲}=۲۰\times۳۹=۷۸۰$$

۸ گزینه ۲

$$t_n=an+b\xrightarrow{t_{۱۰}=۲۳}۲۳=۱۰a+b$$

$$t_{۱۳}=t_۸+۲۰\Rightarrow ۱۳a+b=۸a+b+۲۰\Rightarrow ۵a=۲۰\Rightarrow a=۴$$

$$۲۳=۱۰a+b\xrightarrow{a=۴}۲۳=۴۰+b\Rightarrow b=-۱۷\Rightarrow t_n=۴n-۱۷$$

۹

گزینه ۲

می‌دانیم اعداد ۱ تا ۶، عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳- هستند. چون سمت راست بازه، باز است، لذا برای اینکه بازه شامل شش عدد طبیعی ۱ تا ۶ باشد، باید نامعادلهٔ $۶ < ۲m + ۸ \leq ۷$ برقرار باشد، یعنی داریم:

$$۶ < ۲m + ۸ \leq ۷ \Rightarrow -۲ < ۲m \leq -۱ \Rightarrow -۱ < m \leq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow m \in (-۱, -\frac{۱}{۲}]$$

۱۰

گزینه ۳

اگر قرار باشد عبارت درجه دو به فرم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره بالای محور xها قرار داشته باشد باید دو شرط زیر هم زمان برقرار باشد:

$$۱)\ \ a > ۰$$

$$۲)\ \ \Delta < ۰$$

مجموعه جواب هر دو نامعادله را تعیین کرده و بین آن ها اشتراک می گیریم:

$$f(x) = (a-۱)x^۲ + ۲\sqrt{۲}x + a$$

$$۱)\ \ a - ۱ > ۰ \Rightarrow a > ۱ \quad (I)$$

$$۲)\ \ \Delta < ۰ \Rightarrow (۲\sqrt{۲})^۲ - ۴(a-۱)(a) < ۰ \Rightarrow ۸ - ۴a^۲ + ۴a < ۰$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ - ۴a - ۸ > ۰ \xrightarrow{\div ۴} a^۲ - a - ۲ > ۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)(a+۱) > ۰ \Rightarrow a < -۱ \text{ یا } a > ۲ \quad (II)$$

اشتراک مجموعه جواب های (I) و (II) برابر است با:

$$(I) \cap (II) : a > ۲$$

۱۱

گزینه ۲

در دستهٔ اول ۱، دستهٔ دوم ۲ و... و در دستهٔ بیستم، ۲۰ عدد داریم پس در کل به‌اندازهٔ $۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۲۰ = \frac{۲۰}{۲}(۱ + ۲۰) = ۲۱۰$ عدد فرد داریم؛ بنابراین جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم، ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی $(۲n - ۱)$ است.

$$۲ \times ۲۱۰ - ۱ = ۴۱۹$$

۱۲ گزینه ۳

فرمول عمومی دنبالهٔ حسابی به‌شکل زیر است:

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)\, d$$

در دنبالهٔ حسابی a_n داریم:

$$\left.\begin{array}{l} O_{۱۵} = a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + \ldots + a_{۱۵} \\ O_{۱۶} = a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + \ldots + a_{۱۶} \end{array}\right\} \Rightarrow O_{۱۶} - O_{۱۵} = a_{۱۶}$$

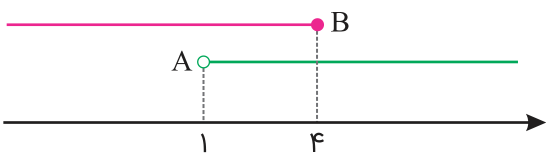
پس سؤال در واقع جملهٔ شانزدهم دنبالهٔ حسابی a_n را می‌خواهد:

$$a_{۱۶} = a_۱ + ۱۵d \xrightarrow[d=۳]{a_۱=۱} a_{۱۶} = ۱ + ۴۵ = ۴۶$$

۱۳ گزینه ۱

$$A = (۱, +\infty)\ ,\ B = (-\infty, ۴]$$

با رسم نمودار هندسی داریم:



$$A - B = (۱, +\infty) - (-\infty, ۴] = (۴, +\infty)$$

$$B - A = (-\infty, ۴] - (۱, +\infty) = (-\infty, ۱]$$

$$\Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = (۴, +\infty) \cup (-\infty, ۱]$$

$$= (-\infty, ۱] \cup (۴, +\infty) = \mathbb{R} - (۱, ۴]$$

تذکر: توجه کنید اگر $a < b$ باشد، آنگاه:

$$۱)\ (-\infty, a] \cup [b, +\infty) = \mathbb{R} - (a, b)\ ,\ ۲)\ (-\infty, a) \cup (b, +\infty) = \mathbb{R} - [a, b]$$

$$۳)\ (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \mathbb{R} - [a, b)\ ,\ ۴)\ (-\infty, a] \cup (b, +\infty) = \mathbb{R} - (a, b]$$

۱۴ گزینه ۲

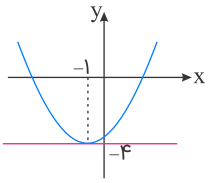
$$\frac{۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n - ۱)}{n} = \frac{۳n - ۲۰}{۴} \Rightarrow \frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n} = \frac{۳n - ۲۰}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{n - ۱}{۲} = \frac{۳n - ۲۰}{۴} \Rightarrow ۴n - ۴ = ۶n - ۴۰$$

$$\Rightarrow ۲n = ۳۶ \Rightarrow n = ۱۸$$

۱۵ گزینه ۳

چون تابع g ثابت است، لذا $g(x) = k$ و نمودار آن موازی محور xها خواهد بود. پس نمودار به‌صورت زیر خواهد بود.



پس تابع ثابت در رأس سهمی بر تابع f مماس است. لذا باید عرض رأس سهمی را پیدا کنیم.

عرض رأس سهمی برابر ۴- است. پس ضابطهٔ تابع ثابت $g(x) = -۴$ خواهد بود، بنابراین: $g(\sqrt{۳} - ۱) = -۴$

۱۶ گزینه ۱

مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول در عرض:

$$\text{طول} \times \text{عرض} = \underbrace{۸x^۳ - ۱}_{\text{تفاضل مکعبات}}$$

$$\Rightarrow \text{طول} \times \cancel{(۲x - ۱)} = \cancel{(۲x - ۱)}(۴x^۲ + ۲x + ۱) \Rightarrow \text{طول} = ۴x^۲ + ۲x + ۱$$

$$\text{محیط} = (\text{طول} + (\text{عرض} \times ۲ = (۴x^۲ + ۲x + ۱ + ۲x - ۱) \times ۲$$

$$= (۴x^۲ + ۴x) \times ۲ = ۸x^۲ + ۸x$$

۱۷ گزینه ۳

عبارت درجه اول هیچ‌گاه همواره منفی یا همواره مثبت نیست، پس به ازای هیچ مقداری از a، عبارت داده‌شده همواره منفی نیست و پاسخ گزینهٔ ۳ است. توجه کنید که چون عبارت درجهٔ اول است، ضریب x نمی‌تواند صفر باشد، یعنی $a \neq ۲$ است.

x		$x = \frac{۳}{a-۲}$	
$(a-۲)x-۳$	مخالف علامت $(a-۲)$	۰	موافق علامت $(a-۲)$

۱۸ گزینه ۲

چون عبارت $x^۴ + ۳$ همواره مثبت است، پس در تعیین علامت بی‌تأثیر است و آن را نادیده می‌گیریم؛ یعنی کافی است که عبارت $P(x) = x^۴ - x^۳ + x^۲ - x$ را تعیین علامت کنیم.

$$P(x) = x^۴ - x^۳ + x^۲ - x = x^۳(x-۱) + x(x-۱) = x(x-۱)(x^۲+۱)$$

عبارت همواره مثبت $x^۲ + ۱$ را در تعیین علامت حذف می‌کنیم، لذا داریم:

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x(x-۱)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین عبارت داده‌شده در بازهٔ $(۰, ۱)$ منفی است، پس:

$$\max(b-a) = ۱ - ۰ = ۱$$

۱۹ گزینه ۱

$$ax^۲ + ۲x + ۴a \geq ۰$$

$$\begin{cases} \Delta \leq ۰ \Rightarrow ۲^۲ - ۴a(۴a) \leq ۰ \Rightarrow ۴ - ۱۶a^۲ \leq ۰ \Rightarrow ۱۶a^۲ \geq ۴ \Rightarrow a^۲ \geq \frac{۱}{۴} \\ a > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \leq -\frac{۱}{۲} \ \text{یا}\ a \geq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{a>۰} \text{جواب}: a \geq \frac{۱}{۲}$$

۲۰ گزینه ۲

$$x^۳ > ۰ \Rightarrow x > ۰ \quad (*)$$

$$\frac{x^۳ - ۲x^۲ + x}{x^۲} = \frac{x^۳}{x^۲} - \frac{۲x^۲}{x^۲} + \frac{x}{x^۲} = x - ۲ + \frac{۱}{x} \quad (**)$$

نکته:

$$\begin{cases} x + \frac{۱}{x} \geq ۲ & ; x > ۰ \\ x + \frac{۱}{x} \leq -۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

$$\xrightarrow{(**)} x + \frac{۱}{x} - ۲ \geq ۲ - ۲ \Rightarrow x + \frac{۱}{x} - ۲ \geq ۰$$

۲۱

گزینه ۱

فرم کلی تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است، پس باید ضریب x یک شود و ضریب $x^۲$ نیز صفر شود:

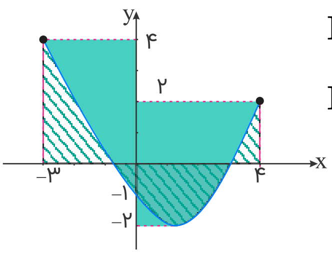
$$\begin{cases} \frac{a}{۳}=۱ \Rightarrow a=۳ \\ ۲a-b=۰ \xrightarrow{a=۳} ۲(۳)-b=۰ \Rightarrow ۶-b=۰ \Rightarrow b=۶ \end{cases}$$

پس جواب گزینهٔ "۱" است.

۲۲

گزینه ۳

در نمودار مختصاتی یک تابع برای به دست آوردن دامنه کافی است تصویر نقاط نمودار را روی محور x، بیابیم و برای به دست آوردن برد، تصویر نقاط نمودار را روی محور yها می‌یابیم، باتوجه‌به این موضوع داریم:



$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid -۳\le x\le ۴\}$$

$$R_f=\{y\in\mathbb{R} \mid -۲\le y\le ۴\}$$

۲۳

گزینه ۱

الف) $a_n=n^۲+۱ \Rightarrow$ دنباله غیرخطی است

ب) $d=۰$ اگر $\Rightarrow$ جملات دنباله ثابت هستند

ج) $r<۰$ اگر $\Rightarrow$ جملات دنباله نوسانی هستند

پس هر سه مورد غلط است.

۲۴

گزینه ۳

مورد "ب" نادرست است:

$$\sqrt{۴+۹}\neq\sqrt{۹}+\sqrt{۴}$$

۲۵

گزینه ۳

در گزینهٔ "۳" داریم:

$$۳a_{۲n+۱}-۲a_{۳n}=۳(a+(۲n+۱-۱)d)-۲(a+(۳n-۱)d)$$

$$=۳a+۶nd-۲a-۶nd+۲d=a+۲d=a+(۳-۱)d=a_۳$$

نادرستی سایر گزینه‌ها نیز قابل اثبات کنید.

۲۶ گزینه ۲

$$h > ۱۰ \Rightarrow -t^{۲} + ۳t + ۱۰ > ۱۰ \Rightarrow -t^{۲} + ۳t > ۰ \Rightarrow t(-t+۳) > ۰$$

t		۰		۳	
$t(-t+۳)$	$-$		$+$		$-$
	ت ن				

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (۰, ۳) = (a, b) \Rightarrow b - a = ۳$$

۲۷ گزینه ۲

هرگاه در یک دنبالهٔ هندسی رابطهٔ $m + n = r + s$ برقرار باشد، داریم:

$$a_m \times a_n = a_r \times a_s$$

$$\Rightarrow ۴ + ۱۲ = ۸ + ۸ \Rightarrow a_{۴} \times a_{۱۲} = a_{۸} \times a_{۸}$$

$$\Rightarrow ۹ \times a_{۱۲} = ۱۲ \times ۱۲ \Rightarrow a_{۱۲} = \frac{۱۴۴}{۹} = ۱۶$$

۲۸ گزینه ۱

$$\sqrt[۳]{\frac{-\sqrt[۶]{۴}}{\sqrt[۵]{-۲}}} = \sqrt[۳]{\frac{-\sqrt[۶]{۲^{۲}}}{-\sqrt[۵]{۲}}} = \sqrt[۳]{\frac{۲^{\frac{۲}{۶}}}{(۲)^{\frac{۱}{۵}}}} = \sqrt[۳]{۲^{(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵})}} = \sqrt[۳]{۲^{\frac{۲}{۱۵}}} = ۲^{\frac{۲}{۴۵}}$$

$$(۰/۵)^{-۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳} = ۲^{۳}$$

$$\Rightarrow A = ۲^{\frac{۲}{۴۵}} \times ۲^{۳} = ۲^{(\frac{۲}{۴۵}+۳)} = ۲^{\frac{۱۳۷}{۴۵}}$$

۲۹ گزینه ۴

گزینهٔ "۴" تابع نیست، چون هر عدد نامنفی دارای دو ریشهٔ دوم است. برای مثال ریشه‌های دوم عدد ۴، برابر با ۲- و ۲ هستند.

۳۰ گزینه ۲

نمودار $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار $y=4x^4$ قرار دارد، پس:

$$(x-1)^2>4x^4 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |x-1|>2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1)\ x-1>2x^2 \\ \text{یا} \\ 2)\ x-1<-2x^2 \end{cases}$$

دو نامعادلهٔ فوق را حل می‌کنیم:

$$1)\ x-1>2x^2 \Rightarrow 2x^2-x+1<0 \xrightarrow{a>0,\Delta<0} \text{غ ق ق}$$

$$2)\ x-1<-2x^2 \Rightarrow \underbrace{2x^2+x-1}_{p(x)}<0 \Rightarrow \Delta=9 \Rightarrow x=-1\ ,\ \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$p(x)$		+	0	− ج	0	+	

$$\Rightarrow x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)$$

برای اینکه $b-a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a,b)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$، درنتیجه:

$$b-a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$