ریاضی و آمار

۱ گزینه ۳

کل اعداد ۳ رقمی ممکن : $\underline{۴}\,\underline{۴}\,\underline{۳} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$

کل اعداد ۳رقمی بزرگ‌تر از۶۰۰ : $\underbrace{۱}_{\text{فقط ۹}}\ \underline{۴}\ \underline{۳} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۱ \times ۴ \times ۳ = ۱۲$

اعداد ۳ رقمی کوچک‌تر از۱۳۰ : $\underbrace{۱}_{\text{فقط ۱}}\ \underbrace{۲}_{\text{۲ یا ۰}}\ \underline{۳} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد مطلوب = کل − حالات نامطلوب $= ۴۸ - ۱۲ - ۶ = ۳۰$

۲ گزینه ۳

گام اول

الف) ۵ نفر برای سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. دو نفر a و b را جدا کرده ایم. اگر قرار باشد بین دو نفر a و b فقط یک نفر سخنرانی کند، باید از ۳ نفر باقی مانده یک نفر انتخاب شود و بین این دو نفر قرار گیرد، یعنی انتخاب یک نفر از ۳ نفر باقی مانده.

ب) در صورت تست اشاره نشده است که ابتدا شخص a سخنرانی می‌کند یا شخص b، پس در محاسبهٔ تعداد حالت‌های ممکن باید جابه‌جایی این دو نفر را هم درنظر بگیریم (پس ۲! حالت برای جابه‌جایی a و b).

ج) حالا a و b و فردی که بین آن‌ها قرار می‌گیرد را یک نفر فرض می‌کنیم که با دو نفر باقی مانده می‌توانند جابه‌جا شوند (۳! حالت داریم).

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر بین a,b}} \times \overbrace{۲!}^{\text{جابجایی a,b}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی ترکیب ۳ نفر با ۲نفر دیگر}} = ۳ \times ۲ \times ۶ = ۳۶$$

۳ گزینه ۳

برای سفر از شهر A به شهر C باید از شهر B یا شهر D عبور کرد. بنابراین:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = ۳ \times ۳ + ۴ \times ۲ = ۹ + ۸ = ۱۷$$

۴

گزینه ۴

گام اول

الف) از بین $۵ + ۶ = ۱۱$ موش، ۳ موش انتخاب می‌شود. قرار است لااقل یک موش سفید باشد پس می‌تواند یکی، دو تا یا هر سه تای آن‌ها سفید باشد.

ب) متمم این‌که لااقل یک موش از سه موش انتخاب شده سفید باشد، سیاه بودن هر سه موش است.

گام دوم

روش اول:

$$\text{P}(\text{لااقل یک موش سفید}) = \text{P}(\text{یک موش سفید}) + \text{P}(\text{دو موش سفید}) + \text{P}(\text{سه موش سفید})$$

$$= \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۷۵}{۱۶۵} + \frac{۶۰}{۱۶۵} + \frac{۱۰}{۱۶۵} = \frac{۱۴۵}{۱۶۵} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از پیشامد احتمال متمم

$$\text{P}(\text{A}') = \text{P}(\text{هر سه موش سیاه}) = \frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۴}{۳۳}$$

$$\text{P}(\text{A}) = \text{P}(\text{لااقل یک موش سفید}) = ۱ - \text{P}(\text{A}') = ۱ - \frac{۴}{۳۳} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

۵

گزینه ۳

در مرحلهٔ طرح و برنامه‌ریزی (گام دوم) علاوه بر توافق در مورد چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای موردنظر، دربارهٔ چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوهٔ تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

گزارش معیارها و ارائهٔ نمودارها و دیگر نتایج آماری مربوط به مرحلهٔ تحلیل داده‌ها (گام چهارم) است.

۶

گزینه ۱

$$\text{n}(\text{S}) = ۶ \times ۶ = ۳۶, \text{A} = \underbrace{\{(۱,۴), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۱)\}}_{\substack{\text{حالت‌هایی که مجموع دو عدد} \\ \text{ظاهرشده برابر با ۵ می‌شود}}}$$

$$\Rightarrow \text{n}(\text{A}) = ۴ \Rightarrow \text{P}(\text{A}) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

۷

گزینه ۳

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{\text{n}}{\text{r}}$ است، پس:

$$\binom{\text{n}}{۲} = ۳۶ \Rightarrow \frac{\text{n}!}{(\text{n}-۲)! \times ۲!} = ۳۶ \Rightarrow \frac{\text{n}(\text{n}-۱)(\text{n}-۲)!}{(\text{n}-۲)! \times ۲!} = ۳۶$$

$$\Rightarrow \text{n}(\text{n}-۱) = ۷۲ \Rightarrow \text{n}(\text{n}-۱) = ۹ \times ۸ \Rightarrow \text{n} = ۹$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی} = \binom{۹}{۶} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۶!} = ۸۴$$

۸ گزینه ۴

تعداد کل مهره‌ها : $۴+۵+۳=۱۲$

$$n(S)=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲!}{۱۰!\times ۲!}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰!}{۱۰!\times ۲\times ۱}=۶۶$$

۹ گزینه ۲

اگر $P(A)$ احتمال "رو" آمدن حداقل یک سکه باشد، آنگاه $P(A')=۱-P(A)$ احتمال این است که هیچ‌کدام از سکه‌ها "رو" نیامده باشد. به عبارت دیگر همهٔ سکه‌ها پشت آمده باشد که فقط یک حالت $\{پ,پ,پ\}$ دارد. ازطرفی تعداد اعضای فضای نمونهٔ پرتاب ۳ سکه برابر $n(S)=۲^۳=۸$ است. بنابراین:

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

۱۰ گزینه ۱

توجه کنید که بعد از انتخاب کتاب‌ها در قفسه به ترتیب چیده می‌شوند، پس ترتیب قرار گرفتن مهم است؛ بنابراین حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۴}\times ۶!+\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۳}\times ۶!+\binom{۵}{۴}\binom{۴}{۲}\times ۶!$$
$$=(۱۰+۴۰+۳۰)\times ۶!=۸۰\times ۶!$$

۱۱ گزینه ۲

ابتدا سه شهر از پنج شهر را انتخاب می‌کنیم. سپس از ده نفر در هر شهر انتخاب‌شده، یک نفر را انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۱۰}{۱}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}\times ۱۰\times ۱۰\times ۱۰=۱۰^۴$$

۱۲ گزینه ۳

یعنی فقط جایگشت‌هایی که هم ۳۶ و هم ۲۵ دارند غیر مطلوب‌اند، پس کل جایگشت‌ها را حساب می‌کنیم و آن‌هایی را که هم ۲۵ و هم ۳۶ دارند کم می‌کنیم. تعداد این جایگشت‌ها اگر ۲۵ و ۳۶ هرکدام یک شیء در نظر گرفته شوند همراه با ۱ و ۴ می‌شوند، ۴ شیء و دارای $۴!$ جایگشت هستند، پس داریم:

$$۶!-۴!=۷۲۰-۲۴=۶۹۶$$

۱۳ گزینه ۱

$$\text{داده‌ها}: ۲۴,۱۴,۱۰,۱۲ \Rightarrow \bar{x}=\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}=\frac{۶۰}{۴}=۱۵$$

$$\Rightarrow \sigma^۲=\frac{(۲۴-۱۵)^۲+(۱۴-۱۵)^۲+(۱۰-۱۵)^۲+(۱۲-۱۵)^۲}{۴}$$

$$=\frac{۸۱+۱+۲۵+۹}{۴}=\frac{۱۱۶}{۴}=۲۹\xrightarrow{\text{جذر}}\sigma=\sqrt{۲۹}$$

بنابراین گزینهٔ "۱" درست است.

۱۴ گزینه ۲

فضای نمونهٔ پاسخ دادن به ۳ تست چهار گزینه‌ای : $n(S) = ۴^۳ = ۶۴$

فضای نمونهٔ پاسخ دادن به ۴ تست دو گزینه‌ای : $n(S) = ۲^۴ = ۱۶$

$$\Rightarrow \frac{۶۴}{۱۶} = ۴$$

۱۵ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار، میانگین برابر ۷ است. داریم:

$$\frac{۱۳ + ۵ + ۷ + x + ۹ + ۱ + ۳}{۷} = ۷ \Rightarrow ۳۸ + x = ۴۹ \Rightarrow x = ۱۱$$

حال انحراف معیار را می‌یابیم:

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۳-۷)^۲ + (۵-۷)^۲ + (۷-۷)^۲ + (۱۱-۷)^۲ + (۹-۷)^۲ + (۱-۷)^۲ + (۳-۷)^۲}{۷}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۳۶ + ۴ + ۰ + ۱۶ + ۴ + ۳۶ + ۱۶}{۷} = \frac{۱۱۲}{۷} = ۱۶ \Rightarrow \sigma = ۴$$

ازطرفی می‌دانیم در نمودار داده‌شده، y برابر است است با:

$$y = \bar{x} + \sigma = ۷ + ۴ = ۱۱$$

۱۶ گزینه ۳

حروف و، ا، ر، م، ی (به‌شرط آنکه ی آخرین حرف باشد) ۵ حرف بی‌نقطه هستند، پس:

$$\underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱} \Rightarrow ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲۴$$

۱۷ گزینه ۱

احتمال رخ ندادن پیشامد A را با $P(A')$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$P(A) = ۱ - P(A') \Rightarrow P(A) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P(A')} = \frac{۰/۴}{۰/۶} = \frac{۲}{۳}$$

۱۸ گزینه ۲

n نفر به $(n-۱)!$ می‌توانند دور یک میز بنشینند. حال چون می‌خواهیم دو نفر همواره کنار یکدیگر باشند، بنابراین جایگاه این دو نفر را به عنوان یک جایگاه در نظر می‌گیریم که می‌توانند کنار هم به $۲!$ جابه‌جا شوند. پس ۶ نفر به $(۵-۱)! \times ۲!$ حالت می‌توانند دور یک میز بنشینند به‌طوری‌که دو نفر همواره کنار هم باشند:

$$(۵-۱)! \times ۲ = ۴! \times ۲ = ۲۴ \times ۲ = ۴۸$$

۱۹ گزینه ۴

باتوجه‌به ارقام داده‌شده اولین رقم از سمت چپ باید ۱ باشد و رقم یکان، یکی از ارقام ۰، ۶ و ۸ باشد.

$$\underline{۱}_{۱} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۳} = ۳۶$$

۲۰ گزینه ۱

اعداد را در دسته‌های مختلف، دسته‌بندی می‌کنیم. اعدادی که رقم یکان آن‌ها صفر و یا ۵ باشد.

رقم یکان صفر باشد : $\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۱}_{۰} = ۱۲$

رقم یکان ۵ باشد : $\underline{۳} \times \underline{۳} \times \underline{۱}_{۵} = ۹$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۱۲ + ۹ = ۲۱$$

۲۱ گزینه ۴

در محاسبهٔ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، ابتدا ۵ نفر از ۷ نفر را انتخاب می‌کنیم و سپس آن‌ها را در یک ردیف می‌نشانیم که $۵!$ جایگشت دارند:

$$n(S) = \binom{۷}{۵} \times ۵! = \frac{۷!}{۲! \times ۵!} \times ۵! = \frac{۷!}{۲}$$

برای اینکه دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف باشند باید دو برادر حتماً در انتخاب‌شده‌ها باشند، درنتیجه باید سه نفر از ۵ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را طوری محاسبه می‌کنیم که دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف باشند:

$$n(A) = \binom{۵}{۳} \times (۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱) = ۱۰ \times ۱۲ = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲۰}{\frac{۷!}{۲}} = \frac{۱۲۰ \times ۲}{۷ \times ۶ \times ۵!} = \frac{۱}{۲۱}$$

۲۲ گزینه ۲

تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۲ رقمی: $۶ = \frac{\text{۳ حالت}}{\text{یکان}} \times \frac{\text{۲ حالت}}{\text{دهگان}}$

تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۳ رقمی: $۱۸ = \frac{۳}{\text{یکان}} \times \frac{۳}{\text{دهگان}} \times \frac{۲}{\text{صدگان}}$

تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۴ رقمی: $۵۴ = \frac{۳}{\text{یکان}} \times \frac{۳}{\text{دهقان}} \times \frac{۳}{\text{صدگان}} \times \frac{۲}{\text{هزارگان}}$

حالا طبق اصل جمع باید اعداد حاصل را باهم جمع کنیم:

$$۶ + ۱۸ + ۵۴ = ۷۸$$

۲۳ گزینه ۳

بهتر است از پیشامد متمم استفاده کنیم، یعنی ابتدا فرض می‌کنیم مجموع دو عدد ۷ باشد:

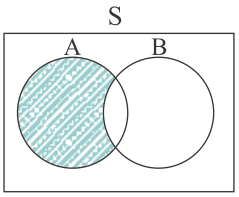
$$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$$
$$A = \{(۱,۶), (۶,۱), (۲,۵), (۵,۲), (۳,۴), (۴,۳)\} \Rightarrow n(A) = ۶$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$
$$\Rightarrow P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

۲۴ گزینه ۳

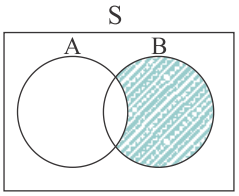
تمام موارد مطرح‌شده در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ جزء مرحلهٔ طرح و برنامه‌ریزی هستند ولی حذف داده‌های دورافتاده مربوط به گام سوم چرخهٔ آمار است. نام گام سوم در چرخهٔ آمار، داده‌ها است که شامل گردآوری، سازماندهی و پاکسازی داده‌ها است. ضمناً توجه کنید که گام دوم چرخهٔ آمار شامل روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری و روش انجام کار است.

۲۵ گزینه ۲

فقط A رخ دهد:



فقط B رخ دهد:



فقط A یا فقط B رخ دهد: