۱ گزینه ۱

$$\tan(۲x+۱)=\frac{۱}{\tan(x-۱)}\Rightarrow \tan(۲x+۱)=\cot(x-۱)$$

$$\Rightarrow \tan(۲x+۱)=\tan(\frac{\pi}{۲}-x+۱)\Rightarrow ۲x+۱=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x+۱$$

$$\Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

۲ گزینه ۳

اگر $x\in[-۱,۱]$، آنگاه:

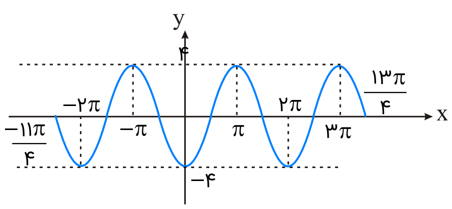
$$-۱\le x\le ۱\Rightarrow -۳\pi\le -۳\pi x\le ۳\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴}-۳\pi\le\frac{\pi}{۴}-۳\pi x\le\frac{\pi}{۴}+۳\pi\Rightarrow\frac{-۱۱\pi}{۴}\le\frac{\pi}{۴}-۳\pi x\le\frac{۱۳\pi}{۴}$$

حال با در نظر گرفتن $\frac{\pi}{۴}-۳\pi x=\theta$، ضابطهٔ تابع مفروض سؤال، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=-۴\cos\theta\ ;\ \ \frac{-۱۱\pi}{۴}\le\theta\le\frac{۱۳\pi}{۴}$$

که شکل آن به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta=-\pi$، $\theta=\pi$ و $\theta=۳\pi$، بیشترین مقدار خود را دارد.

۳ گزینه ۳

$$۲(۱-\cos^۲ x)+۹\cos x+۳=۰$$

$$\Rightarrow ۲-۲\cos^۲ x+۹\cos x+۳=۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-۹\cos x-۵=۰$$

$$\Rightarrow (۲\cos x+۱)(\cos x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x=۵ \ \text{غ.ق.ق} \\ \cos x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\cos x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

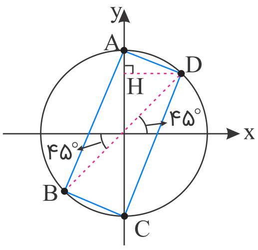
۴ گزینه ۲

$$۱-\frac{\sin ۲x}{۲}=\sin^۲ x \Rightarrow ۱-\sin^۲ x=\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \cos^۲ x-\sin x\cos x=\cos x\,(\cos x-\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \cos x-\sin x=۰ \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

با مشخص کردن انتهای کمان جواب‌های بالا، چهارضلعی $ABCD$ حاصل می‌شود. این چهارضلعی مستطیل است.



حال داریم:

$$S_{ABCD}=۲S_{\overset{\triangle}{ACD}}=۲\left(\frac{۱}{۲}AC.DH\right)$$

$$\xrightarrow[DH=\cos ۴۵^\circ]{AC=۲} S_{ABCD}=۲\left(\frac{۱}{۲}(۲)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right)=\sqrt{۲}$$

۵ گزینهٔ ۱

دورهٔ تناوب $y = ۳\sin cx - ۲$ برابر با $\frac{۲\pi}{|c|}$ است، پس:

$$\frac{۲\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = ۲$$

ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \pi\sin(-x) + c$ برابر با $\pi + c$ و $-\pi + c$ است، پس:

$$-\pi + c + \pi + c = ۲c \Rightarrow |۲c| = ۲\,|c| = ۴$$

۶ گزینهٔ ۲

$$\sin ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow \sin ۲x = \sin x$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x\in(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})} x_۱ = ۰ \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \xrightarrow{x\in(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})} x_۲ = -\frac{\pi}{۳},\ x_۳ = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

بنابراین، این معادلهٔ مثلثاتی در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$، دارای ۳ جواب است.

۷ گزینهٔ ۴

$$\sin^۲ x = \sin x \Rightarrow \sin x(\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \text{ یا } \sin x = ۱$$

معادلهٔ $\sin x = ۰$ در بازهٔ داده‌شده ۳ جواب $x = ۰, \pi, ۲\pi$ دارد.
معادلهٔ $\sin x = ۱$ در این بازه یک جواب $x = \frac{\pi}{۲}$ دارد.
بنابراین معادلهٔ داده‌شده در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، چهار جواب دارد.

۸ گزینهٔ ۴

باتوجه‌به نمودار تابع $\tan x$، باید $\tan a = ۱$ و a در ربع اول باشد؛ بنابراین $a = \frac{\pi}{۴}$ است و $\tan b = \sqrt{۳}$ و b در $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ است، پس $b = \frac{۴\pi}{۳}$؛ بنابراین:

$$b - a = \frac{۴\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۳\pi}{۱۲}$$

۹ گزینه ۳

برای ساده تر شدن معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) = \sin x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

اگر در حل معادلهٔ مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ بازنویسی می کنیم.

$$۲\sin(\pi - x)\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) + ۳\cot x \sin(\pi + x) = ۰$$
$$\Rightarrow ۲\sin x \sin x + ۳\cot x(-\sin x) = ۰$$
$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x - ۳\cos x = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x} ۲(۱ - \cos^۲ x) - ۳\cos x = ۰$$
$$\Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰ \Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \cos x = -۲ \quad \text{غ.ق.} \end{cases}$$

۱۰ گزینه ۳

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۲} - \alpha) = \sin(۴\pi + \frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(۱۸\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(۷\pi + \alpha) = \sin(۶\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۲} + \alpha) = \sin(۸\pi + \frac{\pi}{۲} + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{-\sin\alpha + \cos\alpha} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos\alpha} A = \frac{-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}$$
$$\Rightarrow A = \frac{-۱ - \tan\alpha}{-\tan\alpha + ۱} = \frac{-۱ - \frac{۱}{۲}}{-\frac{۱}{۲} + ۱} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -۳$$

۱۱ گزینه ۳

می‌دانیم اگر $\alpha + \beta = \pi$، آنگاه داریم:

$$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \cos\beta = (\pi - \alpha)$$
$$\Rightarrow \cos\beta = -\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = ۰$$

پس داریم:

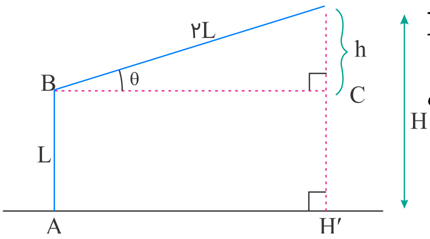
$$\underbrace{(\cos\frac{\pi}{۲۰} + \cos\frac{۱۹\pi}{۲۰})}_{۰} + \underbrace{(\cos\frac{۲\pi}{۲۰} + \cos\frac{۱۸\pi}{۲۰})}_{۰} + \ldots + \underbrace{(\cos\frac{۹\pi}{۲۰} + \cos\frac{۱۱\pi}{۲۰})}_{۰} + \underbrace{\cos\frac{۱۰\pi}{۲۰}}_{۰} = ۰$$

۱۲ گزینه ۲

$$A=\frac{\sin(۲۰^\circ+۵۰^\circ)}{-\cos(۴۰^\circ+۱۰^\circ)}=\frac{\sin ۷۰^\circ}{-\cos ۵۰^\circ}=\frac{\cos ۲۰^\circ}{-\sin ۴۰^\circ}=\frac{\cos ۲۰^\circ}{-۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}=\frac{-۱}{۲\sin ۲۰^\circ}$$

۱۳ گزینه ۳

ابتدا ارتفاع نوک گیرهٔ این روبات تا سطح زمین را به‌صورت تابعی از θ می‌نویسیم:



$$h=۲L\sin\theta \Rightarrow H=L+۲L\sin\theta$$

می‌دانیم بیشترین مقدار ممکن زمانی رخ می‌دهد که $\sin\theta=۱$ باشد که در این صورت $H=۳L$

پس طبق فرض، روبات در حالتی قرار دارد که:

$$H=\frac{۳L}{۲}\Rightarrow L+۲L\sin\theta=\frac{۳L}{۲}\Rightarrow ۲L\sin\theta=\frac{L}{۲}\Rightarrow \sin\theta=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{۱-\sin^۲\theta}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

درنتیجه:

$$AH'=BC=۲L\cos\theta=۲L\times\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}L$$

۱۴ گزینه ۳

می‌دانیم:

$$\log a+\log b+\log c+\cdots=\log(a\times b\times c\times\cdots)$$

بنابراین:

$$A=\log\tan ۱^\circ+\log\tan ۲^\circ+\ldots+\log\tan ۸۸^\circ+\log\tan ۸۹^\circ$$
$$=\log(\tan ۱^\circ\times\tan ۲^\circ\times\ldots\times\tan ۸۸^\circ\times\tan ۸۹^\circ)$$

اکنون عبارت جلوی $\log$ را کمی تغییر می‌دهیم؛ یعنی:

$$\tan ۸۹^\circ=\cot ۱^\circ\ ,\ \tan ۸۸^\circ=\cot ۲^\circ\ ,\ldots$$

$$A=\log(\tan ۱^\circ\times\tan ۲^\circ\times\ldots\times\tan ۴۴^\circ\times\tan ۴۵^\circ\times\underbrace{\cancel{\tan ۴۶^\circ}}_{\cot ۴۴^\circ}\times\underbrace{\cancel{\tan ۴۷^\circ}}_{\cot ۴۳^\circ}\times\ldots\times\underbrace{\cancel{\tan ۸۹^\circ}}_{\cot ۱^\circ})$$

$$A=\log((\tan ۱^\circ\times\cot ۱^\circ)\times(\tan ۲^\circ\times\cot ۲^\circ)\times\ldots\times\tan ۴۵^\circ)=\log(۱\times۱\times۱\times\ldots\times۱)=\log ۱=۰$$

۱۵ گزینه ۳

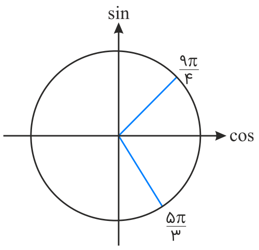
عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ساعت، $\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۱۲}$ رادیان را طی می‌کند و چون ۳۵ دقیقه برابر با $\frac{۳۵}{۶۰}$ ساعت است، پس عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{\pi}{۶}\times\frac{۳۵}{۶۰}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی $\frac{۷\pi}{۷۲}$ رادیان.

۱۶ گزینه ۱

با به دست آوردن محدودهٔ $۲x$ داریم:

$$-\frac{\pi}{۱۸}<\frac{x-\pi}{۳}<\frac{\pi}{۲۴}\xrightarrow{\times ۳}-\frac{\pi}{۶}<x-\pi<\frac{\pi}{۸}$$

$$\xrightarrow{+\pi}\frac{۵\pi}{۶}<x<\frac{۹\pi}{۸}\xrightarrow{\times ۲}\frac{۵\pi}{۳}<۲x<\frac{۹\pi}{۴}$$



در این بازه، $\cos ۲x$ هریک از مقادیر بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱]$ را می‌تواند اختیار کند؛ یعنی:

$$\frac{۱}{۲}<\cos ۲x\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<۲m-۱\le ۱\Rightarrow\frac{۳}{۴}<m\le ۱$$

۱۷ گزینه ۱

$$۱۷^\circ+۲۸^\circ=۴۵^\circ\Rightarrow\cot(۱۷^\circ+۲۸^\circ)=\cot ۴۵^\circ=۱$$

می‌دانیم $\cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-۱}{\cot a+\cot b}$ بنابراین:

$$\frac{\cot ۱۷^\circ\cot ۲۸^\circ-۱}{\cot ۲۸^\circ+\cot ۱۷^\circ}=\cot ۴۵^\circ=۱$$
$$\Rightarrow\cot ۲۸^\circ+\cot ۱۷^\circ=\cot ۱۷^\circ\cot ۲۸^\circ-۱$$
$$\Rightarrow\cot ۲۸^\circ+\cot ۱۷^\circ-\cot ۱۷^\circ\cot ۲۸^\circ-۱=-۲$$
$$\Rightarrow\cot ۲۸^\circ(۱-\cot ۱۷^\circ)-(۱-\cot ۱۷^\circ)$$
$$=(\cot ۲۸^\circ-۱)(۱-\cot ۱۷^\circ)=-۲\Rightarrow(۱-\cot ۲۸^\circ)(۱-\cot ۱۷^\circ)=۲$$

۱۸ گزینه ۴

$$\frac{-\tan ۲۰^\circ(۳\sin ۷۰^\circ + ۵\cos ۱۶۰^\circ)}{\sin ۳۴۰^\circ - ۲\sin(-۲۰^\circ)} = \frac{-\tan ۲۰^\circ(۳\cos ۲۰^\circ - ۵\cos ۲۰^\circ)}{۲\sin ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{-\tan ۲۰^\circ(-۲\cos ۲۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ} = ۲\tan ۲۰^\circ \cot ۲۰^\circ = ۲$$

۱۹ گزینه ۳

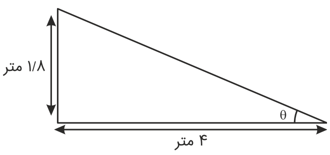
با جایگذاری مقادیر $\tan ۳۰^\circ$، $\cot ۶۰^\circ$، $\cos ۴۵^\circ$، $\sin ۳۰^\circ$ و $\tan ۶۰^\circ$ در عبارت A داریم:

$$A = \frac{۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱ - (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲} + ۴ \times (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲}) - \sqrt{۳} = \frac{\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}}{\frac{۲}{۳}} + ۱ - \sqrt{۳} = ۱$$

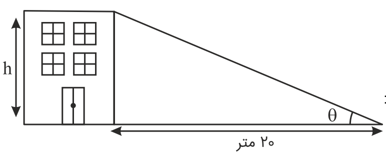
۲۰ گزینه ۲

چون خورشید به هر دو با یک زاویه می‌تابد، زاویهٔ تشکیل‌شده در انتهای سایهٔ حسین و سایهٔ خانه یکسان است.

مطابق شکل‌های زیر، اگر $\tan\theta$ را برای هریک از شکل‌ها بنویسیم، داریم:



$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{۱/۸}{۴} \\ \tan\theta = \frac{h}{۲۰} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{۱/۸}{۴} = \frac{h}{۲۰} \Rightarrow h = ۹\text{متر}$$

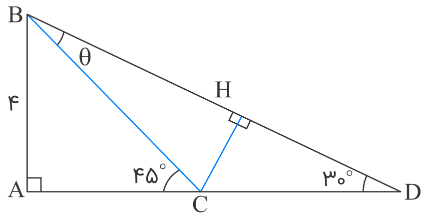
۲۱ گزینه ۲

$$\tan\alpha + \cot\alpha = ۴ \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ۴ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} = ۴ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$$

۲۲ گزینه ۲

راه‌حل اول: رأس‌های مثلث را نام‌گذاری می‌کنیم و از رأس C عمودی بر ضلع BD رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: \tan ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = ۱ \Rightarrow AC = ۴$$

$$\text{فیثاغورس}: BC = \sqrt{۴^۲ + ۴^۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABD} = \tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{AD} \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow CD = ۴\sqrt{۳} - ۴ = ۴(\sqrt{۳} - ۱)$$

$$\overset{\Delta}{CHD}: \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow CH = \frac{۴(\sqrt{۳} - ۱)}{۲} = ۲\sqrt{۳} - ۲$$

$$\overset{\Delta}{BCH} = \sin\theta = \frac{CH}{BC} = \frac{۲\sqrt{۳} - ۲}{۴\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۳}{۸}} - \sqrt{\frac{۱}{۸}}$$

راه‌حل دوم:

$$S_{\overset{\Delta}{BCD}} = \frac{۱}{۲}BC \times BD \times \sin\theta = \frac{۱}{۲}CD \times BD \times \sin ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow BC\sin\theta = CD\sin ۳۰^\circ \Rightarrow \frac{BC}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{CD}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\frac{۱}{۲}CD}{BC} = \frac{\frac{۱}{۲}(۴(\sqrt{۳} - ۱))}{۴\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۳}{۸}} - \sqrt{\frac{۱}{۸}}$$

۲۳ گزینه ۱

عرض از مبدأ خط ℓ برابر با ۳- است، پس معادلهٔ آن را می‌توان به‌صورت $y = mx - ۳$ در نظر گرفت. نقطهٔ $(۲\sqrt{۳}, ۳)$ روی خط ℓ است، پس:

$$۳ = ۲\sqrt{۳}m - ۳ \Rightarrow m = \sqrt{۳}$$

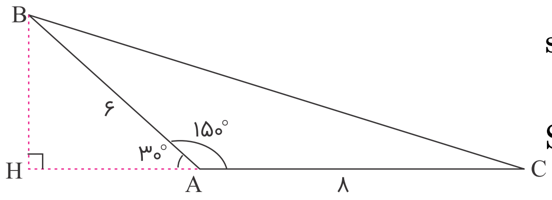
$$\text{شیب خط}: \tan\beta = \sqrt{۳} \xrightarrow{\beta \text{ حاده است}} \beta = ۶۰^\circ \quad (۱)$$

$$\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\beta = ۶۰^\circ} \alpha = ۱۲۰^\circ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{۱۲۰^\circ}{۶۰^\circ} = ۲$$

۲۴ گزینه ۲

راه‌حل اول:



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{BH}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BH = ۳$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times BH \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۸ = ۱۲$$

راه‌حل دوم: در سال یازدهم خواهید خواند که اگر مجموع دو زاویه برابر با ۱۸۰° باشد، $\sin$ آن‌ها باهم برابر است. پس $\sin ۱۵۰^\circ = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ است که با جایگذاری در رابطهٔ مساحت مثلث یعنی $S = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin ۱۵۰^\circ$ به جواب $S = ۱۲$ می‌رسیم.

۲۵ گزینه ۱

شیب خط برابر است با $\tan$ زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد:

$$a = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

ازآنجاکه خط محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-۲, ۰)$ می‌گذرد:

$$۰ = ۱ \times (-۲) + b \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow a + b = ۳$$