

گزینه ۲

۱

در توابع مثلثاتی به فرم $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ، کمترین مقدار تابع برابر $c - |a|$ است. بنابراین در این سؤال داریم:

$$y_{\min} = |a| - 3|a| = -2|a| = -4 \Rightarrow |a| = 2$$

$$\Rightarrow \text{دوره تناوب : } T = \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2}{|a|} \xrightarrow{|a|=2} T = 1$$

گزینه ۴

۲

باتوجه به نمودار داریم:

$$(\circ, -2), (2, \circ) : y = x - 2 \xrightarrow{x=4} y = 2$$

برد تابع $f(x - 2)$ با تابع $f(x)$ برابر است؛ بنابراین:

$$R_{f(x)} = [-2, 2] \Rightarrow R_{\varpi f(x)} = [-6, 6] \Rightarrow R_{\varpi f(x)-1} = [-7, 5]$$

$$\Rightarrow \circ \leq |\varpi f(x) - 1| \leq 7 \Rightarrow \circ \leq \sqrt{|\varpi f(x) - 1|} \leq \sqrt{7}$$

گزینه ۴

۳

مقدار ماکسیمم تابع برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$|a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

از آنجایی که تابع مذکور در اطراف $x = \circ$ ، حالت صعودی دارد، پس b و a هم علامت هستند. ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که a و b هر دو مثبت هستند:

$$f(x) = 2 \sin(b\pi x) - 1$$

باتوجه به ضابطه تابع، نمودار تابع در نقاطی محور x ها را قطع می کند (صفر می شود) که مقدار سینوس برابر با $\frac{1}{2}$ باشد. برای x های مثبت، این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ می افتد. باتوجه به شکل تابع، نمودار برای بار دوم در $x = \frac{5}{3}$ محور x ها را قطع می کند، پس:

$$\pi b \times \frac{5}{3} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه، برای حالتی که b و a هر دو منفی هستند $a = -2$ و $b = -\frac{1}{2}$ به دست می آید.

نقطه $(۴, ۵)$ روی نمودار $y = f(1 - x) + a$ قرار دارد، پس:

$$۵ = f(1 - ۴) + a \Rightarrow f(-۳) = ۵ - a \Rightarrow (-۳, ۵ - a) \in f$$

ازطرفی نقطه $(b, ۴)$ نیز روی نمودار $y = f(2x - 1)$ قرار دارد، پس:

$$۴ = f(2b - 1) \Rightarrow (2b - 1, ۴) \in f$$

این دو نقطه متناظر با یک نقطه در تابع f هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} 2b - 1 = -۳ \\ ۴ = ۵ - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -۱ \\ a = ۱ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۰$$

در تابع $y = mf(ax + b) + n$ مقادیر a و b روی برد و مقادیر m و n روی دامنه تأثیر ندارند. اگر برد $y = \frac{1}{۲}f(x - ۲)$ برابر بازه $[-۱, ۲]$ باشد، برد تابع $y = f(x)$ بازه $[-۲, ۴]$ و درنتیجه برد تابع $y = -f(1 - 2x)$ بازه $[-۴, ۲]$ خواهد بود. برای تعیین دامنه تابع $y = -f(1 - 2x)$ ابتدا دامنه تابع $y = f(x)$ را به دست می‌آوریم:

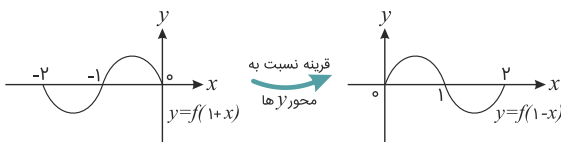
$$-۲ \leq x \leq ۳ \Rightarrow -۴ \leq x - ۲ \leq ۱ \Rightarrow D_f = [-۴, ۱]$$

$$\Rightarrow -۴ \leq ۱ - 2x \leq ۱ \Rightarrow -۵ \leq -2x \leq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow D_{-f(1-2x)} = [۰, \frac{۵}{۲}]$$

بنابراین دامنه و برد تابع $y = -f(1 - 2x)$ به ترتیب بازه‌های $[۰, \frac{۵}{۲}]$ و $[-۴, ۲]$ و اشتراکشان بازه $[۰, ۲]$ است.

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(1 + x)$ به دست آید. سپس نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(1 - x)$ به دست آید. داریم:



دامنه تابع، برابر است با $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. اکنون ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sin \sqrt{2}x}{\sin x} + \frac{\cos \sqrt{2}x}{\cos x} \Rightarrow f(x) = \frac{\sin \sqrt{2}x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos \sqrt{2}x}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2}x + x)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x} \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{2} \sin \sqrt{2}x}{\sin \sqrt{2}x} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2} \cos \sqrt{2}x ; x \neq \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$$

دوره تناوب این تابع برابر است با $\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}} = \pi$.

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x}_1 + \underbrace{\sqrt{2} \sin \pi x \cos \pi x}_{\sin \sqrt{2} \pi x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \sin \sqrt{2} \pi x$$

دوره تناوب این تابع برابر است با $T = \frac{\sqrt{2}\pi}{|\sqrt{2}\pi|} = 1$.

می‌دانیم ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a + b \sin cx$ به ترتیب $a + |b|$ و $a - |b|$ است، پس مینیمم و ماکزیمم تابع $y = 1 + \sin \sqrt{2} \pi x$ به ترتیب برابر است با $m = 1 - |1| = 0$ و $M = 1 + |1| = 2$.

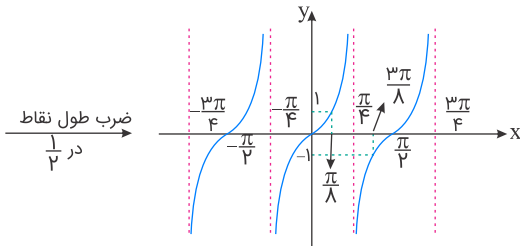
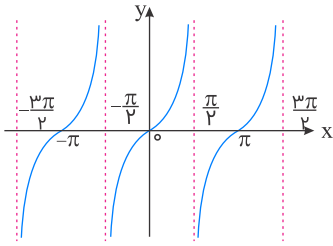
$$\Rightarrow M + m - T = 2 + 0 - 1 = 1$$

تابع تانژانت در فاصله دوره تناوب خود، صعودی اکید است.

همچنین می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \tan(bx + c) + d$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است. پس داریم:

$$T = \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\pi$$

نمودار تابع $y = \tan(2x)$ را با انقباض افقی نمودار تابع $y = \tan x$ رسم می‌کنیم:



باتوجه به نمودار بالا داریم:

$$\frac{\pi}{\lambda} < x < \frac{3\pi}{\lambda}, x \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\tan(2x)| > 1 \Rightarrow \left| \frac{2}{m-3} \right| > 1$$

$$\Rightarrow |m-3| < 2 \Rightarrow 1 < m < 5$$

اما واضح است که مقدار $m = 3$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow m \in (1, 5) - \{3\}$$

اگر $x \in [-1, 1]$ ، آنگاه:

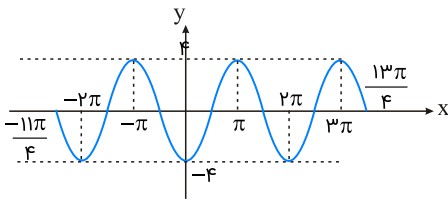
$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3\pi \leq -3\pi x \leq 3\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{\pi}{4} + 3\pi \Rightarrow \frac{-11\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{13\pi}{4}$$

حال با در نظر گرفتن $\theta = \frac{\pi}{4} - 3\pi x$ ، ضابطه تابع مفروض سؤال، به صورت زیر درمی آید:

$$y = -4 \cos \theta ; \quad \frac{-11\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{13\pi}{4}$$

که شکل آن به صورت زیر است:



ملاحظه می کنید که این تابع در سه نقطه با طول های $\theta = -\pi$ ، $\theta = \pi$ و $\theta = 3\pi$ ، بیشترین مقدار خود را دارد.

$$y = a + \cos\left(-\frac{1}{3} + bx\right)\pi \Rightarrow y = a + \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \pi bx\right) \Rightarrow y = a + \sin(\pi bx)$$

$$\xrightarrow[\frac{2\pi}{T} = 9 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{9}]{\text{با توجه به نمودار}} \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

با توجه به نمودار، چون بلافاصله بعد از محور y ها، نمودار نزول می کند (برعکس نمودار $\sin x$)، پس ضریب کمان سینوس

می بایست منفی باشد و داریم: $b = -\frac{1}{3}$

همچنین نقطه $(0, 1)$ روی منحنی قرار دارد، بنابراین:

$$1 = a + \sin\left(-\frac{1}{3}\pi(0)\right) \Rightarrow a = 1$$

$$f(29) = y = 1 + \sin\left(-\frac{\pi}{3} \times 29\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اگر نمودار $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی انتقال دهیم، $f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به طرف y های منفی منتقل می‌کنیم، $g(x) = f(x) - 9$ به دست می‌آید.

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

باتوجه به نمودار، دامنه تابع f بازه $D_f = [-4, 4]$ است. برای یافتن دامنه تابع $f(\frac{x}{2})$ دامنه تابع f را در ۲ ضرب و برای یافتن دامنه تابع $f(2x)$ دامنه تابع f را بر ۲ تقسیم می‌کنیم؛ پس داریم:

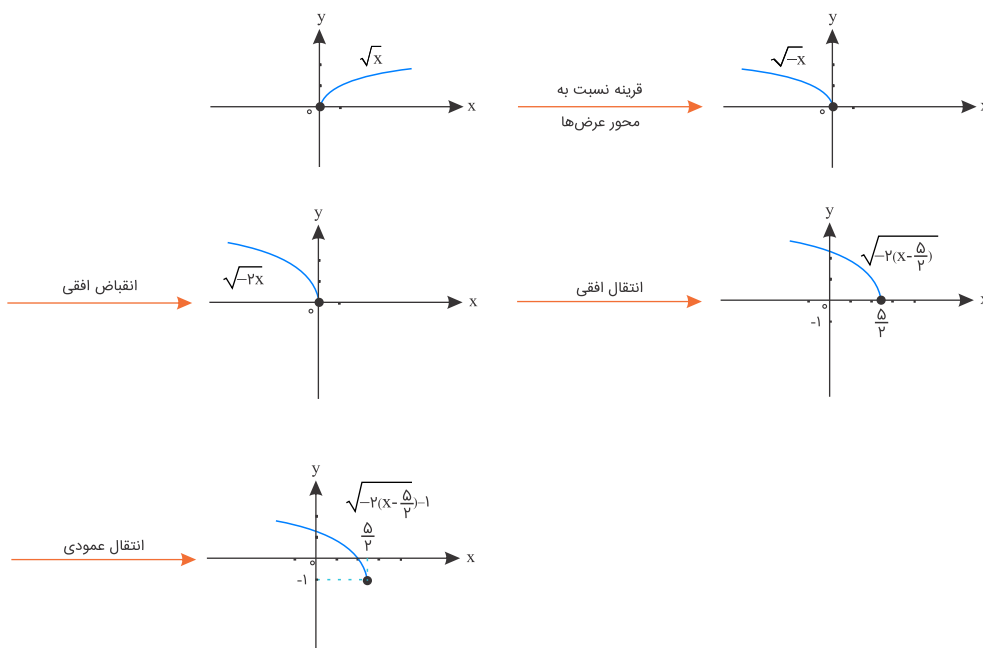
$$D_{f(\frac{x}{2})} = [2 \times (-4), 2 \times 4] = [-8, 8]$$

$$D_{f(2x)} = \left[\frac{-4}{2}, \frac{4}{2} \right] = [-2, 2]$$

لذا دامنه تابع $g(x) = f(\frac{x}{2}) - f(2x)$ برابر است با:

$$D_g = D_{f(\frac{x}{2})} \cap D_{f(2x)} = [-8, 8] \cap [-2, 2] = [-2, 2]$$

$$y = \sqrt{5 - 2x} - 1 = \sqrt{-2 \left(x - \frac{5}{2} \right) - 1}$$



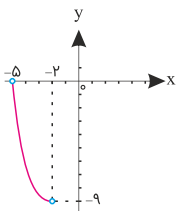
$$\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{B}$$

$$\Rightarrow 365 = \frac{2\pi}{B} \Rightarrow B = \frac{2\pi}{365} = \frac{6/28}{365} \simeq 0/017$$

$$f(x) = (x+2)^2 - 9$$

$$D_f : \left| x + \frac{2}{2} \right| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x + \frac{2}{2} < \frac{3}{2} \xrightarrow{-\frac{2}{2}} -\frac{10}{2} < x < -\frac{4}{2} \Rightarrow D_f = (-5, -2)$$

تابع را در این بازه رسم می‌کنیم:



بنابراین تابع $f(x)$ در بازه داده شده نزولی است.

$$\frac{S_{\text{متوازی الاضلاع}}}{S_{\text{مثلث}}} = 4 \Rightarrow \frac{ab \sin \alpha}{\frac{1}{2} a' b' \sin \alpha'} = \frac{(6)(8) \sin 2\theta}{\frac{1}{2} (4)(2) \sin \theta}$$

$$= \frac{48 \sin 2\theta}{4 \sin \theta} = \frac{12(2 \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta} = 4 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{6}$$

حالا مقدار $\tan^2 \theta$ را حساب می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = 36 \Rightarrow \tan^2 \theta = 35$$

از آن جا که $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ ، بنابراین داریم:

$$\tan x - \cot x = -(\cot x - \tan x) = -2 \cot 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cot 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \tan 2x = -4$$

حال برای محاسبه $\cot(4x + \frac{\pi}{4})$ ابتدا $\tan(4x + \frac{\pi}{4})$ را می‌یابیم، سپس آن را معکوس می‌کنیم:

$$\tan(4x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 4x + 1}{1 - \tan 4x} \quad (*)$$

پس به مقدار $\tan 4x$ احتیاج داریم. با توجه به این که $\tan 2x = -4$ ، حاصل $\tan 4x$ را می‌یابیم:

$$\tan 4x = \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{2(-4)}{1 - (-4)^2} = \frac{-8}{-15} = \frac{8}{15}$$

در نتیجه با توجه به (*) داریم:

$$\tan(4x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{8}{15} + 1}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{23}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{23}{7} \Rightarrow \cot(4x + \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{23}$$

از رابطه داده شده، $\tan(\alpha + 20^\circ)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan \alpha + \tan 20^\circ = 3(1 - \tan \alpha \tan 20^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan 20^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 20^\circ} = 3 \Rightarrow \tan(\alpha + 20^\circ) = 3$$

از مقدار $\tan(\alpha + 20^\circ)$ ، $\tan(45^\circ - (\alpha + 20^\circ))$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(45^\circ - \alpha) = \tan(45^\circ - (\alpha + 20^\circ))$$

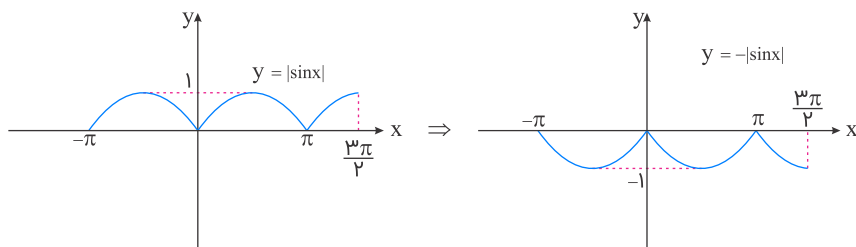
$$= \frac{\tan(45^\circ) - \tan(\alpha + 20^\circ)}{1 + \tan(45^\circ) \tan(\alpha + 20^\circ)} = \frac{1 - 3}{1 + 3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

پس $\cot(45^\circ - \alpha)$ برابر -2 است.

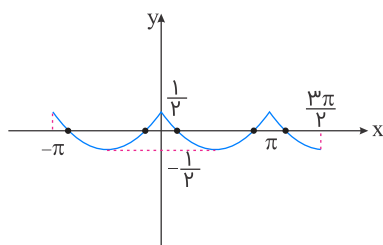
ضابطه تابع داده شده را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y = \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{2} - \sqrt{\sin^2 x} \Rightarrow y = \frac{1}{2} - |\sin x|$$

از طرفی نمودار توابع $y = |\sin x|$ و $y = -|\sin x|$ به صورت زیر است:



حالا نمودار $y = \frac{1}{2} - |\sin x|$ را رسم می کنیم.



همان طور که از روی شکل مشخص است، نمودار تابع $y = \frac{1}{2} - |\sin x|$ محور x ها را در ۵ نقطه از بازه ذکر شده قطع می کند.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tan^2 20^\circ}{1 + \tan 10^\circ \tan 20^\circ} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 20^\circ}}{1 + \frac{\sin 10^\circ \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 20^\circ}}{\frac{\cos 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 10^\circ \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ}} \\ &= \frac{\frac{1}{\cos^2 20^\circ}}{\frac{\cos(20^\circ - 10^\circ)}{\cos 10^\circ}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 20^\circ}}{\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}} = \frac{1}{\cos 20^\circ} \end{aligned}$$

راه حل اول:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1 = \frac{32-25}{25} = \frac{7}{25}$$

راه حل دوم:

از رابطه $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{7}{25}$$

$$A^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha \Rightarrow A^2 - 1 = \sin 2\alpha$$

$$0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 0 < 2\alpha < 180^\circ \Rightarrow 0 < \sin 2\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < A^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 1 < A^2 \leq 2 \Rightarrow 1 < A \leq \sqrt{2}$$

تابع را تشکیل می‌دهیم و حدود تغییرات آن را می‌یابیم. می‌دانیم $-1 \leq \cos x \leq 1$ است و انتقال‌های افقی، ماکزیمم و مینیمم تابع را تغییر نمی‌دهند، بنابراین:

$$-1 \leq \cos(x + 3) \leq 1$$

$$-1 \leq -\cos(x + 3) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq -\cos(x + 3) + 2 \leq 3$$

پس بیشترین مقدار تابع ۳ است.