

۱- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ① -۲ ② ۰٫۵ ③ ۱ ④ ۱٫۵

۲- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- ① -۳٫۵ ② -۳ ③ -۲٫۵ ④ -۲

۳- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه‌ی تابع $f(3 - x)$ ، کدام است؟

- ① $[0, 2]$ ② $[0, 3]$ ③ $[1, 2]$ ④ $[1, 3]$

۴- نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

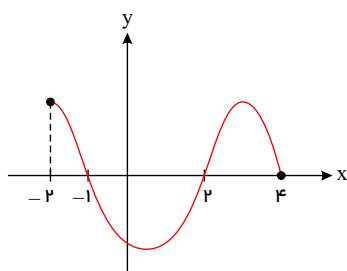
- ① $(3, 4)$ ② $(2, 5)$ ③ $(3, 5)$ ④ $(2, 6)$

۵- نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی سپس ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور x ها است؟

- ① $(-5, 2)$ ② $(-5, 3)$ ③ $(-2, 3)$ ④ $(-2, 5)$

۶- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

- ① $x = 1$ ② $x = 1٫۵$ ③ $x = 2$ ④ $x = ۲٫۵$



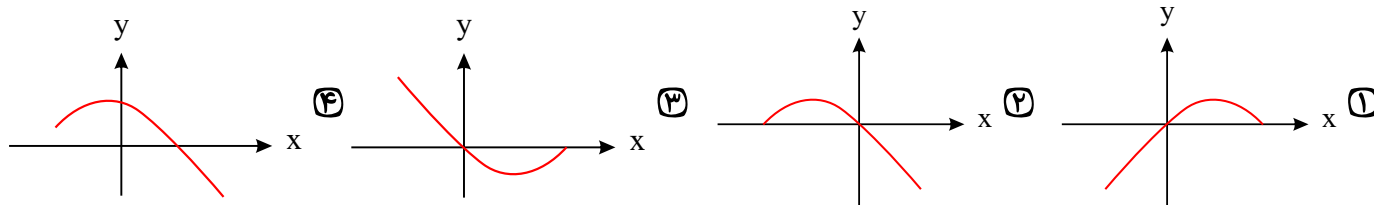
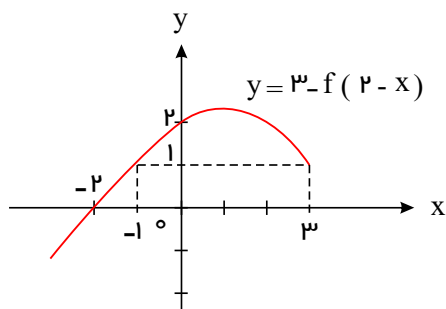
۷- اگر نمودار تابع $y = f(x - 2)$ به صورت روبه‌رو باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- ① $[-3, 2]$ ② $[2, 4]$ ③ $[-2, 3]$ ④ $[0, 1] \cup [4, 6]$

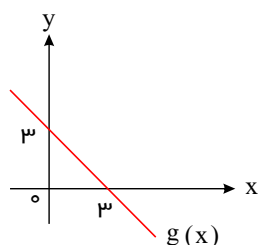
۸- ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟

- ① ۰٫۲ ② -۱٫۱ ③ -۱٫۲ ④ -۲٫۱

۹- با توجه به نمودار $y = 3 - f(2 - x)$ ، نمودار تابع $y = 2 - f(x + 3)$ کدام است؟



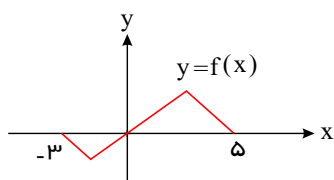
۱۰- نمودار $g(x) = f(x) - 2$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیه محدود به نمودار $h(x) = 3f(2x - 1)$ و محورهای مختصات چقدر است؟



- ① ۱۵
② ۱۲
③ ۱۸
④ ۲۷

۱۱- با اعمال موارد کدام گزینه به ترتیب، نمودار تابع $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}f(1 - x)$ می‌شود؟

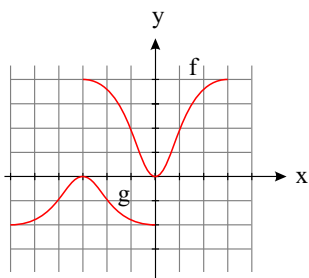
- ① انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی
② انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی
③ انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی
④ انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی



۱۲- اگر شکل زیر تابع $y = f(x)$ را نشان دهد، دامنه تابع با ضابطه $g(x) = \sqrt{xf(-\frac{x}{2})}$ کدام است؟

- ① $[-10, 6]$
② $[0, 6]$
③ $\{-10, 0, 6\}$
④ $\{0\}$

۱۳- در شکل مقابل، نمودار g از طریق تعدادی عملیات انبساط، انقباض، انتقال و قرینه روی تابع f به دست آمده است. ضابطه‌ی تابع g کدام است؟



- ① $\frac{f(-x-3)}{2}$
② $\frac{f(2-x)}{2}$
③ $\frac{-f(x+3)}{2}$
④ $\frac{-f(3-x)}{2}$

۱۴- مجموع صفرهای تابع f برابر ۶ و مجموع صفرهای تابع $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ برابر ۴ است، تابع f چند صفر دارد؟

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۲ (۷)

۴ (۱)

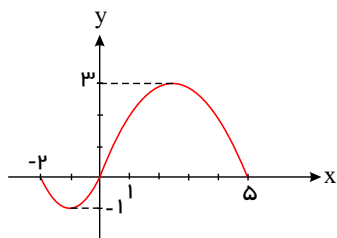
۱۵- اگر نمودار تابع $y = f(x + 2)$ به صورت زیر باشد، دامنه عبارت $\sqrt{xf\left(1 - \frac{x}{2}\right)}$ به کدام صورت است؟

$[-12, -2] \cup [0, 2]$ (۷)

$\{-12, 2\} \cup [-2, 0]$ (۱)

$[-6, -1] \cup [0, 1]$ (۴)

$\{-12\} \cup [-2, 2]$ (۳)



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\substack{\text{دو واحد به طرف} \\ \text{چپ} \\ \text{قرینه نسبت به محور} \\ \text{yها}}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\substack{\text{دو واحد به طرف} \\ \text{چپ} \\ \text{قرینه نسبت به محور} \\ \text{yها}}} h(x) = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x+2} \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+2 = x^2 \rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\rightarrow (x+2)(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 & \text{غلق (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x=1 & \text{قق} \end{cases}$$

۲ - گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم معادله به صورت $y = |\frac{1}{4}(x+4)| - 2$ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به صورت $y = |\frac{1}{4}(x+4)| - 2 + 1$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}} = |\frac{1}{4}x| - 2 \\ y_{\text{جدید}} = |\frac{1}{4}x + 2| - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} |\frac{1}{4}x| - 2 = |\frac{1}{4}x + 2| - 1$$

$$\xrightarrow{\times 4} |x| - 8 = |x + 8| - 4 \Rightarrow |x| - |x + 8| = 4 \xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}} x = -3$$

۳ - گزینه ۴

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline & & & & - & & + & & - \\ \hline \text{عبارت} & & & & & & & & \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

حال برای پیدا کردن دامنه‌ی $f(3-x)$ کافی است $3-x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 3 \geq x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, 3]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطه‌ی $f(3-x)$ را به دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

۴ - گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به جای عبارت $x-3$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد ۲- اضافه شود: بنابراین داریم:

$$y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۵ - گزینه ۱

$$y = x^2 - x - 3 \xrightarrow[\substack{\text{واحد به چپ} \\ x \rightarrow x+2}]{\substack{\text{واحد پایین} \\ 9}} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 \xrightarrow{\substack{\text{واحد پایین} \\ 9}} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9$$

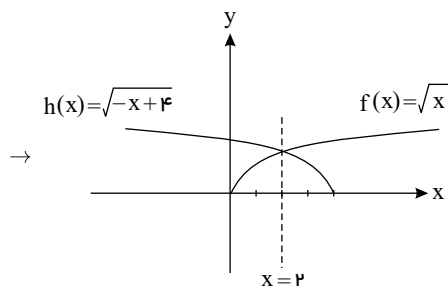
نمودار زیر محور x ها قرار دارد یعنی باید نامعادله $y < 0$ را حل کنیم.

$$y < 0 \Rightarrow (x+2)^2 - (x+2) - 12 < 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 12 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2 \Rightarrow x \in (-5, 2)$$

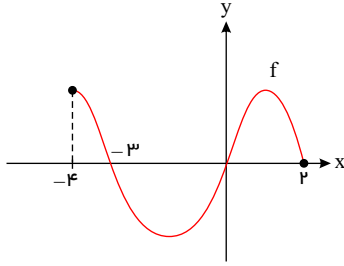
۶ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور}]{\substack{\text{قرینه نسبت به محور} \\ \text{yها}}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{واحد به سمت راست}]{\substack{\text{واحد به سمت راست} \\ \text{۴}}} h(x) = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4}$$



بهتر بود که صورت سؤال این گونه بود که قرینه‌ی تابع f نسبت به خط $x = a$ تابع h گردیده است. a را مشخص کنید.

نمودار $y = f(x)$ ، با انتقال نمودار $y = f(x - 2)$ به اندازه ۲ واحد به سمت چپ به دست می آید.



حال با جدول تعیین علامت زیر داریم:

	-۴	-۳	۰	۲
x	-	-	-	+
$f(x)$	+	۰	-	۰
$g(x) = xf(x)$	-	۰	+	۰

$$D_g : xf(x) \geq 0 \Rightarrow D_g = [-3, 2]$$

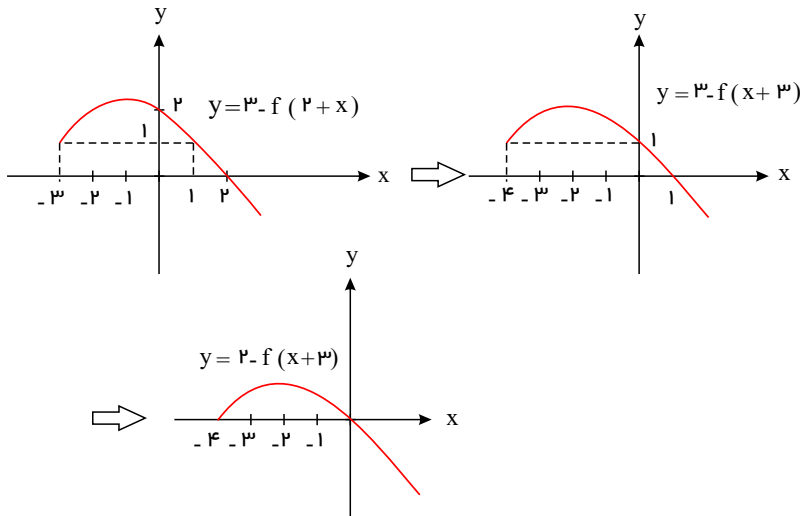
$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x) = -(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت بالا}} h(x) = -(-x-1)^2 + 4$$

$$\text{تلاقی: } (x-1)^2 = -(-x-1)^2 + 4 \rightarrow x^2 + 1 - 2x = -x^2 - 1 - 2x + 4 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1, x = -1$$

$$y = 3 - f(2-x) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = 3 - f(2+x) \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = 3 - f(2+x+1)$$

قرینه نسبت به y ها ۱ واحد انتقال به چپ

$$\Rightarrow y = 3 - f(x+3) \xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y = 2 - f(x+3)$$



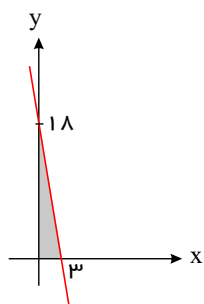
۱۰ - گزینه ۴ ابتدا ضابطه تابع خطی $g(x)$ را به دست می آوریم. برای این کار باید معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(0, 3)$ و $B(3, 0)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 3}{x - 0} = \frac{0 - 3}{3 - 0} = -1 \rightarrow y - 3 = -x \rightarrow y = -x + 3 \rightarrow g(x) = -x + 3 \rightarrow f(x) = -x + 5$$

$$\text{پس: } h(x) = 3 - (2x - 1) + 5 \rightarrow h(x) = -2x + 18$$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می دهیم:

$$x = 0 \rightarrow y = 18, \quad y = 0 \rightarrow x = 9$$

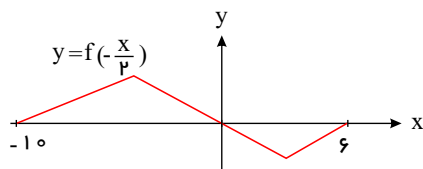


$$\rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times 18 = 27$$

۱۱ - گزینه ۲

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{واحد انتقال به چپ}]{x \rightarrow x+1} f(x+1) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x \rightarrow -x} f(-x+1) \\ \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}]{\frac{1}{4}} -f(-x+1) \xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{4}]{\frac{1}{4}} y = -\frac{1}{4}f(-x+1)$$

۱۲ - گزینه ۳ برای رسم $y = f(-\frac{1}{4}x)$ باید در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را بر $-\frac{1}{4}$ تقسیم کنیم (در -2 ضرب کنیم).



زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$g(x) = \sqrt{xf(-\frac{x}{4})} \Rightarrow xf(-\frac{x}{4}) \geq 0$$

x	-10	0	6
x	-	0	+
$f(-\frac{x}{4})$	0	+	0
$xf(-\frac{x}{4})$	0	-	0

عبارت $xf(-\frac{x}{4})$ در نقاط $x = -10, 0, 6$ صفر و در مابقی نقاط منفی است، پس داریم:

$$D_g = \{-10, 0, 6\}$$

۱۳ - گزینه ۳ ابتدا در مرحله اول، نمودار f را در راستای محور y ها، با ضریب $\frac{1}{4}$ منقبض کرده و در مرحله دوم، آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. در مرحله سوم، نمودار را سه واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow{(1)} y = \frac{f(x)}{4} \xrightarrow{(2)} y = \frac{-f(x)}{4} \xrightarrow{(3)} y = \frac{-f(x+3)}{4}$$

۱۴ - گزینه ۱ فرض می‌کنیم x_i صفر تابع f ، x'_i صفر تابع g و n تعداد صفرهای تابع f باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 6 \quad (*)$$

از طرفی بین صفرهای تابع f و صفرهای تابع g رابطه زیر برقرار است:

$$1 - \frac{x'_i}{2} = x_i$$

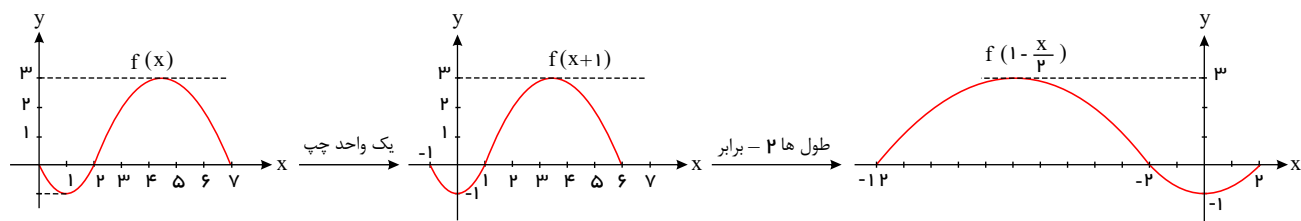
حال رابطه $(*)$ به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$1 - \frac{x'_1}{2} + 1 - \frac{x'_2}{2} + \dots + 1 - \frac{x'_n}{2} = n - \frac{(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n)}{2} = 6$$

بجموع x'_i ها برابر ۴- است.

$$\Rightarrow n - \frac{-4}{2} = n + 2 = 6 \Rightarrow n = 4$$

۱۵ - گزینه ۱ نمودار $f(x+2)$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنه $\sqrt{xf(1 - \frac{x}{2})}$ باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$xf(1 - \frac{x}{2}) \geq 0$$

x	-12	-2	0	2
x		$-$	$-$	$+$
$f(1 - \frac{x}{2})$	0	$+$	0	$-$
$xf(1 - \frac{x}{2})$	0	$-$	0	$-$

$\longrightarrow D_f = [-2, 0] \cup \{-12, 2\}$